现代数学译丛

几何

（第三卷）

凸集和多胞形，正多面体，面积和体积

〔法〕M. 贝尔热 著

科学出版社

现代数学译丛

几　　何

（第三卷）

凸集和多胞形，正多面体，面积和体积

〔法〕M. 贝尔热 著

马传渔 译

周克希 校

科 学 出 版 社

1 9 8 9

内 容 简 介

《几何》是法国数学家 M. 贝尔热为大学生撰写的一套教学参考书. 全书共分五卷. 主要内容为: 群在集合上的作用,仿射与射影空间;欧氏仿射空间;凸集与紧多面体; 二次型,二次超曲面与圆锥曲线;球面与椭圆、双曲几何. 本书配有大量的图和例, 并有许多知识性的注释、按语和历史文献介绍. 本书根据原书第二版翻译.

第三卷介绍凸集和多胞形,正多面体,面积和体积.

本书可供高等院校数学系师生和有关的数学工作者参考.

M. Berger

GÉOMÉTRIE

3/Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes

CEDIC/Fernand Nathan, 1979, 2e édition

现代数学译丛

几 何

(第三卷)

凸集和多胞形,正多面体,面积和体积

[法] M. 贝尔热 著

马传渔 译

周克希 校

责任编辑 杜小杨

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1989年 3 月第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1989年 3 月第一次印刷 印张: 5 3/8

印数: 0001—1,600 字数: 141,000

ISBN 7-03-000841-3/O·214

定价: 4.30 元

目 录

第11章 凸 集 合

在几何中很自然地会遇到凸集；而凸集在分析中也具有重要的作用，甚至在算术、微分几何里也会遇到凸集。本书中，除开有关凸函数的很少一部分内容外，我们只考虑凸性概念的几何观点。此外，作为特殊凸集的多面体，将在下一章作详细的研究。

11.1 节介绍凸集的几个较难的例子．这些例子：Minkowski 的加法、一个凸集关于一个球面的对偶凸集（或配极）、一个凸集的 Steiner 对称，在以后都是要用到的．

11.3 节在不计同胚差别的意义上，给出了凸集的分类和它们边界的分类；因而，从代数拓扑观点来看，凸集是容易研究的。当我们能够把研究对象如此容易地进行分类时，就应该利用这一便利。

11.4 节的内容是古典的，它给出了分离定理和 Hahn-Banach 定理的一些推论．它们特别对于证明凸集间的配极关系是良好对偶，以及在 11.6 节研究关于凸集的边界点都是很有用的．边界点和对偶性在第 12 章里将起极为重要的作用。

11.7 节给出 Helly 定理及其一些推论，这是一个很精彩的定理，叙述却很简单。Krasnosel'skii 定理是它的一个有趣的应用。

最后，11.8 节中定义了凸函数，并给出凸函数的一些性质；两个不那么平常的凸函数的例子都是下文中要用到的：等周不等式的Brunn-Minkowski定理在等周不等式证明中要用到，而Loewner-Behrend 定理将作为仿射二次超曲面的一个特征。

在整个这一章里，只讨论维数为有限数 d 的实仿射空间.

11.1 定义、例子

11.1.1 定义. 设 S 是仿射空间 X 的一个子集. 如果 $\forall x, y \in S$, 有 $[x, y] \subset S$（参见 3.4.3）, 这里 $[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y: \lambda \in [0, 1]\}$, 则称 S 是凸子集, 简称凸集.

11.1.2 例子



图 11.1.1.1.

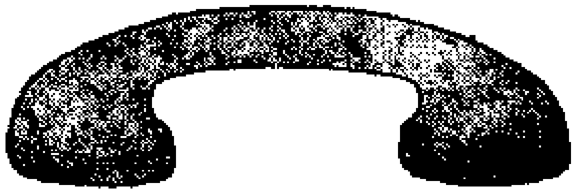


图 11.1.1.2.



图 11.1.1.3.

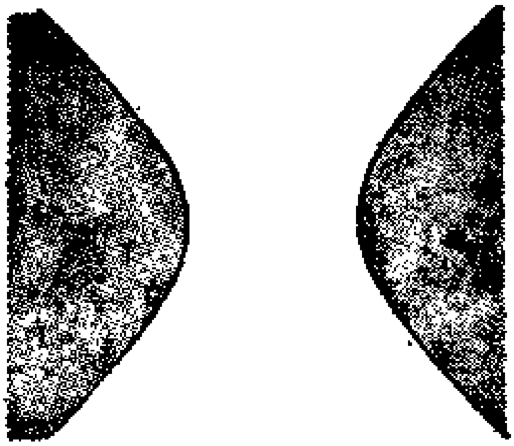


图 11.1.1.4.

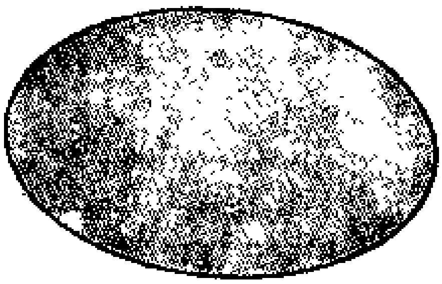


图 11.1.1.5.

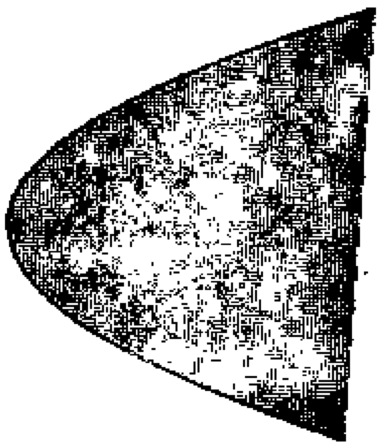


图 11.1.1.6.

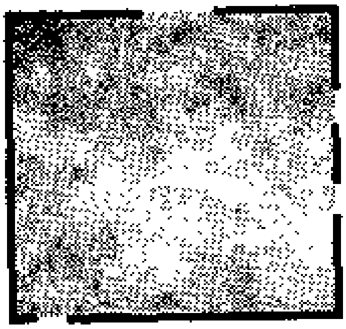


图 11.1.1.7.

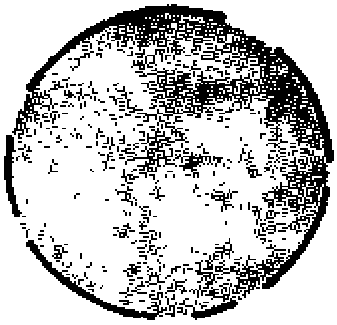


图 11.1.1.8.

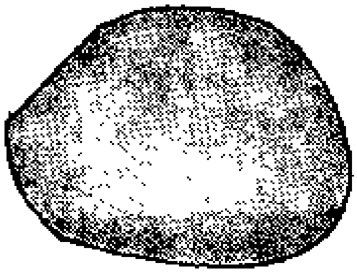


图 11.1.1.9.

11.1.2.1 在上面诸图形中，除图 11.1.1.2 和图 11.1.1.7 外均是凸集．对于图 11.1.1.7 和图 11.1.1.8，更确切地说，图形边界上粗线部分属于所考虑的集合，阴影部分不属于所考虑的集合．图 11.1.1.1 表示平面上一个带形区域；图 11.1.1.3 表示空间中无限延伸的一个圆柱体；图 11.1.1.4、11.1.1.5 和 11.1.1.6 分别表示平面上由双曲线、椭圆和抛物线所决定的区域(参见 17.1.4 节)．

11.1.2.2 整个仿射空间 X，X 的任意一个仿射子空间（参见 2.4)，尤其是点、直线和超平面，都是凸集．空集也是凸集．但正如读者料想得到的那样，这样一来很快就会造成一些似是而非的定理；回想一下 Valintine（[VE] 第 198 页）救援公理是有益的："如果由于集合 A 是空集而使一个定理是错的，那么我们将不言而喻地假设 A 是非空的．我们诚挚地希望以后永远不会再有这类的呼救"．

11.1.2.3 R（或者说 X 在 $d=1$ 时）中的凸集就是区间(任何一种类型的区间)．

11.1.2.4 设 E 是 X 的一个子集，$x\in E$. 若对任意的 $y\in E$，有 $[x,y]\subset E$，则称 E 是一个在 x 处的星形集. 因而，一个凸集在其每一点处都是星形集. 在 11.7.7 节中将看到星形集的一个很漂亮的特征. 星形集是连通的(而且是弧连通的). 特别，凸集是连通的.

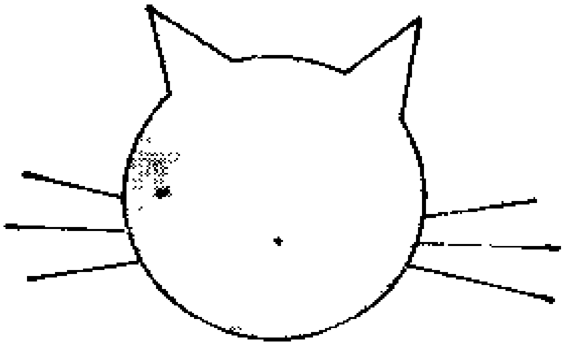


图 11.1.2.4.

11.1.2.5 在欧几里得仿射空间中，每一个开球 $B(a,r)$ 或闭球 $U(a,r)$ 是凸集. 更进一步 (参见图 11.1.1.8)，对于球面 $S(a,r)$ 的任意一个子集 A，$B(a,r)\backslash A$ 总是凸集；对于立方体此结论不成立(参见图 11.1.1.7).

11.1.2.6 设 X,Y 是仿射空间，$S\subset X$ 和 $T\subset Y$ 都是凸集，f: $X\to Y$ 是一个仿射映射. 则 $f(S)\subset Y$ 和 $f^{-1}(T)\subset X$ 仍为凸集 (应用 3.5.1). 特别，如果 $H\subset X$ 是一个超平面，则由它决定的半空间(开的或闭的，参见 2.7.3) 是凸的;事实上，如果对于 X 上一个仿射形式 f, $H=f^{-1}(0)$，则这些区域就是 $f^{-1}([0,\infty[)$, $f^{-1}(]0,\infty[)$, $\cdots$. 而 $[0,\infty[$, $]0,\infty[$ 是 $\mathbf{R}$ 中凸集(参见 11.1.2.3).

11.1.2.7 任意多个 (有限多个或无限多个) 凸集的交集为凸集. 由此根据 (11.1.2.6) 推得，半空间的交集为凸集. 特别，有限多个半空间的交集是凸集: 称为凸多面体. 凸多面体的研究将是第 12 章的主要内容.

凸集的相交并集仍为凸集.

11.1.2.8 向量空间 E 上的正定二次型构成 $\mathscr{P}_2^*(E)$ 的一个



图 11.1.2.7.

凸集. 在 11.8.9 节中还将遇到此例。

下面给出依照不同的方法构作的三个比较复杂一点的凸集的例子。

11.1.3 凸集的加法. Minkowski 首先采用下面的运算：设 S, T 是向量空间 X 的两个凸集，则：

11.1.3.1 $\lambda S+\mu T=\{\lambda s+\mu t:\ s\in S,\ t\in T\}$ 是凸集，其中 λ, μ 为两个任意的实数。

读者可以直接予以证明，或对映射 $f:\ X\times X\ni(x,y)\longmapsto\lambda x+\mu y\in X$ 应用 11.1.2.6 亦可。

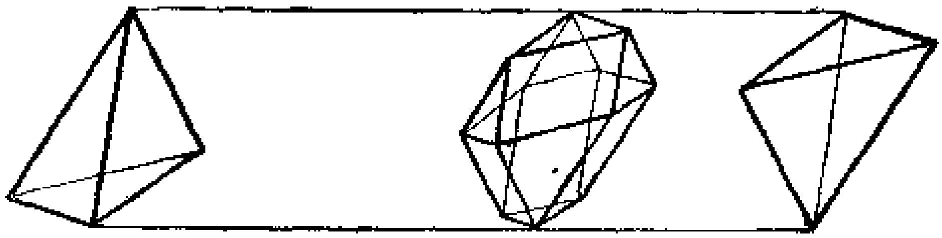


图 11.1.3.1.

如果 X 是仿射空间，上述的加法仅当 $\lambda+\mu=1$ 时才有意义(参见 3.4.1)；否则，$\lambda S+\mu T$ 仅当不计平移差别时，才是确定的，而它的"形状"却总是相同的（参见 2.1.8）。请读者选取 S, T 画出几个 $\lambda S+\mu T$，特别是 $S-T$. 一种特殊的情形在以后等周不等式的证明中将是十分重要的(参见 12.10.10)。

11.1.3.2 定义和命题. 设 X 是欧几里得向量空间，A 是 X 的一个子集，$\varepsilon>0$.

置 $U(A,\varepsilon)=\{x\in X:\ d(x,A)<\varepsilon\}$,

$$B(A, \varepsilon) = \{x \in X: d(x, A) \leqslant \varepsilon\}$$

(参见 0.3), 则有 $U(A, \varepsilon) = A + U(0,\varepsilon)$; 若 A 还是紧的, 则有 $B(A, \varepsilon) = A + B(0, \varepsilon)$.

如果 $d(x, A) < \varepsilon$, 则依 $d(x, A)$ 的定义 (参见 0.3), 存在 $a \in A$, 使得 $d(x, a) < \varepsilon$. 由此推出 $x = a + \overrightarrow{ax} \in A + U(0,\varepsilon)$. 反过来, 如果 $x \in A + U(0, \varepsilon)$, 则有 $x = a + \overrightarrow{ax}$, 使得 $\|\overrightarrow{ax}\| < \varepsilon$. 从而, $d(x, A) \leqslant d(a, x) = \varepsilon$.

在紧的情况下, 我们知道 $\forall x \in X$, $\exists y \in A$, 使得

$$d(x, y) = d(x, A).$$

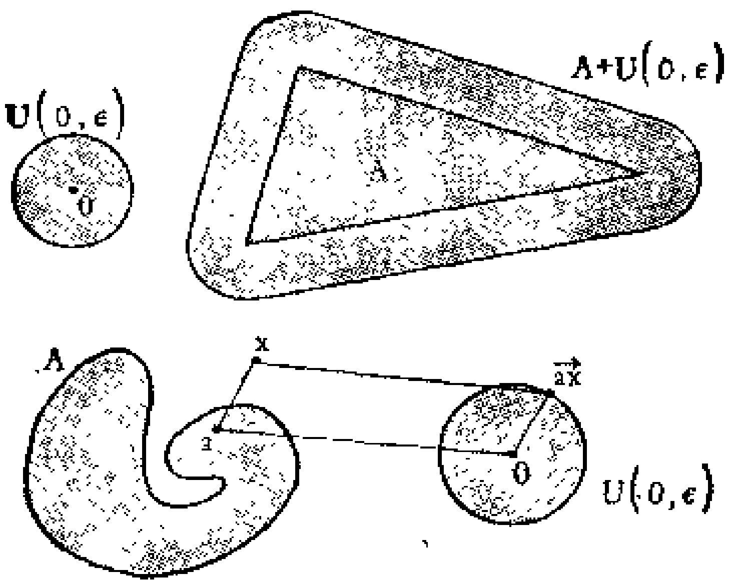


图 11.1.3.2.

11.1.3.3 推论. 如果 A 是凸的, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, $U(A, \varepsilon)$ 也是凸的. 若 A 是紧的, $B(A, \varepsilon)$ 亦然.

11.1.4 凸集的 Steiner 对称化. 采用 9.13 节中的定义和记号:

11.1.4.1 命题. 若 S 是凸的, 则 $\mathrm{st}_H(S)$ 也是凸的.

设 $x, x' \in \mathrm{st}_H(S)$, D 和 D' 分别为过 x 和 x' 的与 H 垂直的直线, $[u, v] = \mathrm{st}_H(S) \cap D$ 和 $[u', v'] = \mathrm{st}_H(S) \cap D'$ 分别是 x 和 x' 所属的线段. 由作法、又因为 S 是凸的, 可知 $[u, v]$ 和 $[u', v']$ 位于 S 中的两个线段 $[a, b]$ 和 $[a'b']$ 所在直线上. 在由 D 和 D' 所

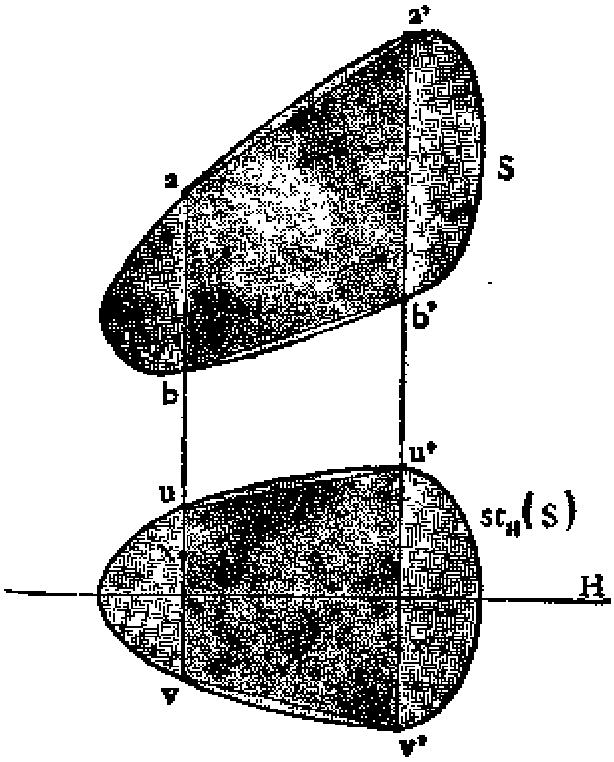


图 11.1.4.

决定的仿射平面内，存在一个仿射映射 f，使得 $a\longmapsto u$，$b\longmapsto v$，$a'\longmapsto u'$，$b'\longmapsto v'$，且由假设条件，f 保持与H垂直的线段长度不变。于是，如果 T 表示以 a，b，a'，b' 为顶点的梯形，则 $f(T)$ 是以 u，v，u'，v' 为顶点的梯形；但因 S 是凸的，故 $T\subset S$，由此得到 $f(T)\subset \mathrm{st}_H(S)$，特别有 $[x, x']\subset \mathrm{st}_H(S)$.

11.1.5 凸集的配极，对偶

11.1.5.1 定义. 设A是欧几里得向量空间X的任意一个子集，A的配极子集为

$$A^* = \{y\in X:\ (x|y)\leqslant 1,\ \forall x\in A\}.$$

根据 11.1.2.7，对于任意的 A，A^* 是一个凸集. 定义 11.1.5.1 和关于X中单位球面 $S = S(0, 1)$ 的逆配极变换有密切联系；事实上，$x\in X$ 的配极超平面不是别的，就是 $\{y\in X:\ (x|y)=1\}$，参见 10.7.11 和 15.5. 请读者除下述这些图形外，再画若干个 A，并作出相应的 A^*. 在 11.4.8 节中将会看到，如果A取遍内部包含有 0 点的紧凸集，则映射 f：$A\mapsto A^*$ 是一个优异的对偶，这种对

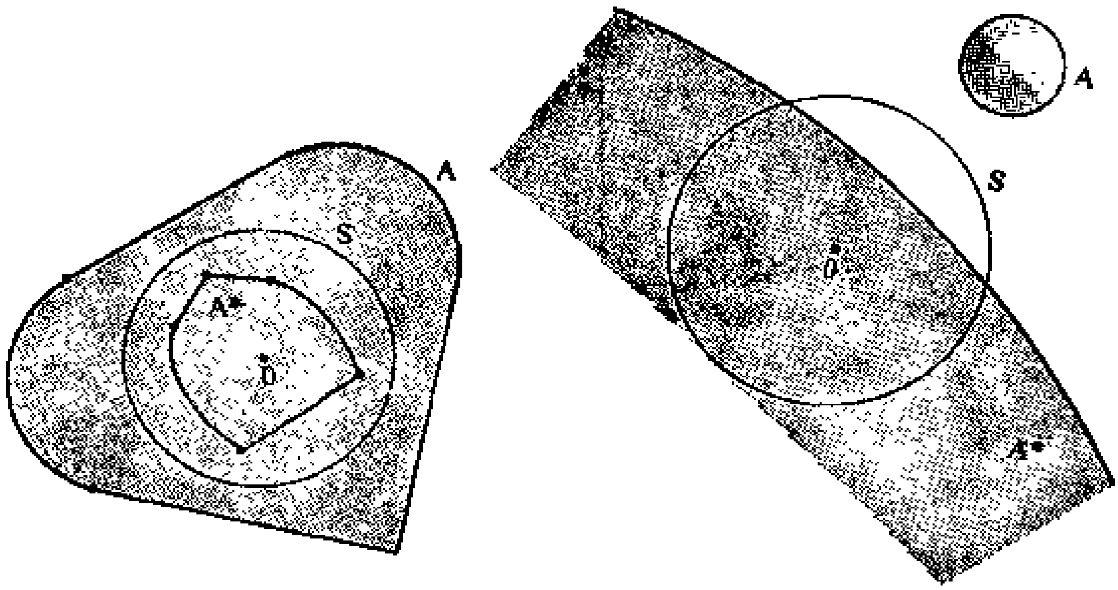


图 11.1.5.

偶在第 12 章中讨论多面体时将要大量地用到.

11.1.6 附注：凸锥. 凸锥是一个重要的概念；一个凸集 C 称为以 x 为顶点的凸锥，意即对于每一个以 x 为中心，比值为 $\lambda\in \boldsymbol{R}_+^*$ 的位似 $H_{x,\lambda}$，C 是稳定的. 我们没有时间研究这个概念，对此例如可参阅 [Bl 3] 第 46 页或者 [VE].

11.1.7 凸集的判定准则. 首先介绍凸集的一个简单的，但很有用也很有趣的性质.

11.1.7.1 命题. 设 S 是欧几里得仿射空间 X 的一个凸集，$x\in X$，则至多存在一点 $y\in S$，使得 $d(x, y)=d(x, S)$（如果 S 是非空闭集，显而易见这样的 y 总是存在的）.

11.1.7.2 引理. 设 S 是 X 的一个凸集，$x\in X$ 和 $y\in S$ 使得 $x\neq y$ 和 $d(x, S)=d(x, y)$，则若 H 表示过 y 并同 $\overrightarrow{xy}$ 垂直的一个超平面，S 必落在由 H 决定的不含 x 的那个闭的半空间内. 如果仅假定 S 是 y 处的一个星形集，本引理依然成立.

采用反证法. 假设 $z\in X$ 为不属于此半空间的一点，则角 $\overrightarrow{yx}$, $\overrightarrow{yz}$ 是锐角，且在 $[y, z]$ 上存在点 t，使得 $d(x, t)<d(x, y)$.

根据 9.22 节，即可由引理推得命题.

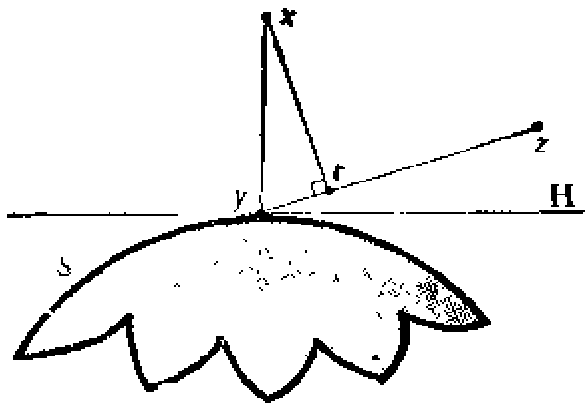


图 11.1.7.

其实性质 11.1.7.1 可作为凸集的特征,这就是 Motzkin 定理:

11.1.7.3 定理. 设 S 是欧几里得仿射空间 X 的一个非空闭集,使 $\forall x \in X$, 存在唯一的 $y \in S$ 使得 $d(x, y) = d(x, S)$, 则 S 是一个凸集.

本定理的一个证明方法可看 [VE] 第 94 页. 这本著作中还有对 S 中与 x "距离最远"的点的研究,见第 98 页和 ii.

11.1.7.4 借助于支撑超平面的概念,在 11.5.4 节中将给出凸集的第二个特征.

在 [VE] 第 48 页和 ii, 还利用"局部凸性"的各种条件给出了凸集的一个特征; 这是一个从局部过渡到大范围的例子. 对于这种类型问题可参看 9.5.4.5; 12.8; 16.4; 18.3.8.6.

11.1.8 凸包络

11.1.8.1 从 11.1.2.2 和 11.1.2.7 节用常规的论证可以推出: 对于仿射空间 X 的任意一个子集 A, 存在一个包含 A 的最小凸



图 11.1.8.

集，即 X 内所有包含 A 的凸集之交．作为定义，这样一个最小的凸集称为 A 的凸包络，记作 $\mathscr{E}(A)$.

11.1.8.2 在 12.1.9 节中（参见 11.6.8）将会看到，X 的有限子集的凸包络的集合和 X 内多面体（紧致）的集合之间有一个恒同关系．

11.1.8.3 为了得到 $\mathscr{E}(A)$，除其它方法外，有两个重要的方法．第二种方法（取包含 A 的所有超平面区域的交集）将放在 11.5.5 节内加以研究．第一种方法是采用重心的办法．

11.1.8.4 命题． 对于 X 的任意一个子集 A，$\mathscr{E}(A)$ 是由 A 内所有作用有正质量的点系的重心所构成的集合，即

$$\mathscr{E}(A)=\left\{\sum_{i\in I}\lambda_i x_i;\ \forall i,\ x_i\in A,\ \forall\lambda_i\geqslant 0,\ \sum_i\lambda_i=1\right.$$
$$\left.\text{（除去有限个 } i \text{ 外 } \lambda_i=0\text{），} i \text{ 是任意的}\right\}.$$

证明是平凡的，利用定义 11.1.1 并在 3.4.9 的基础上用归纳法即可得证．

11.1.8.5 我们会很自然地希望把 11.1.8.4 从两个方面弄得更精细些：第一，点系的基数是否仅限于有界的？如果是，这个基数到底等于什么？第二，是否有必要取 A 中所有点的重心？如果不是，取哪些点？Krein 和 Milman 的定理给出了第二个问题的答案，参看 11.6.8，也可看 11.2.9．回到第一个问题，前面任何一个图形都向读者表明，一般有必要使所取的 I 的基数，$\#I\geqslant d+1$．其实，这个条件也是充分的．

11.1.8.6 定理（Carathéodory）． 对于 d 维仿射空间 X 的任意一个子集 A，我们有

$$\mathscr{E}(A)=\left\{\sum_{i=1}^{d+1}\lambda_i x_i;\ \forall i,\ x_i\in A,\ \forall i,\ \lambda_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{d+1}\lambda_i=1\right\}.$$

设 $x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i$，$k>d+1$；以任何方式将 X 向量化（参阅 2.1.9 节）．因为 $\dim X=d$，而 $k>d+1$，由线性代数知识可知：存在不全为 0 的 $\alpha_i(i=1,\cdots,k)$，使得 $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i=0$ 和

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0.$$

设 $\Theta = \{\tau \in \mathbf{R}: \tau\alpha_i + \lambda_i \geqslant 0 \ \forall i = 1, \cdots, k\}$.
Θ 是 $\mathbf{R}$ 的一个闭集(有限个数的广义不等式);因为 $0 \in \Theta$, 所以 Θ 是非空的。因为 α_i 不全为 0, 所以 $\Theta \neq \mathbf{R}$. 设 τ 是 Θ 的一个边界点,并且相应的 j 满足 $\tau\alpha_j + \alpha_j = 0$, 则有

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \tau\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \tau\alpha_i) x_i$$
$$= \sum_{i \neq j} (\lambda_i + \tau\alpha_i) x_i,$$

由引进符号的意义可知 $\sum_{i \neq j} (\lambda_i + \tau\alpha_i) = 1$, 从而我们把 x 表作了 $k-1$ 个具有正质量的向量的重心。

11.1.8.7 推论. 若 A 是紧的,则 $\mathscr{E}(A)$ 也是紧的。

事实上,若令 $K = \left\{(\lambda_1, \cdots, \lambda_{d+1}) \in \mathbf{R}^{d+1}: \forall i \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1\right\}$, K 是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的一个紧集. 并且 11.1.8.6 表明: $\mathscr{E}(A)$ 是 $K \times A^{d+1} \subset \mathbf{R}^{d+1} \times X^{d+1}$ 在连续映射

$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_{d+1}, x_1, \cdots, x_{d+1}) \longmapsto \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i$$

下的象。

在 11.9.3 中对 11.1.8.6 作了改进。请看 11.2.2 Hilbert 给出了 11.1.8.6 一个很精彩的应用,对此可参看: W. J. Ellison, Waring's problem. American Mathmatical Monthly. **78** (1971), 特别是第 5 节。

11.1.8.8 若 A 是有界的,则直径 $\operatorname{diam}(\mathscr{E}(A)) = \operatorname{diam} A$. 特别, $\mathscr{E}(A)$ 仍是有界的。

这是 11.8.7.6 的一个推论。

11.2 凸性和一般拓扑. 凸集的维数

回想到我们的仿射空间是有限维的，故它有一个典范的拓扑(参见 2.7.1.4).

11.2.1 命题. 如果 S 是凸的，则它的闭包 $\bar{S}$ 也是凸的.

可用两种方法看出这一点. 首先，我们可以利用映射 $(x, y) \longmapsto \lambda x+(1-\lambda)y$ 对任意 λ 的连续性. 其次，于 S 所在的仿射空间 X 内装上一个欧几里得结构后，就有 $\bar{S}=\bigcap_{\varepsilon>0} U(S, \varepsilon)$，因而由 11.1.3.3 本命题得证.

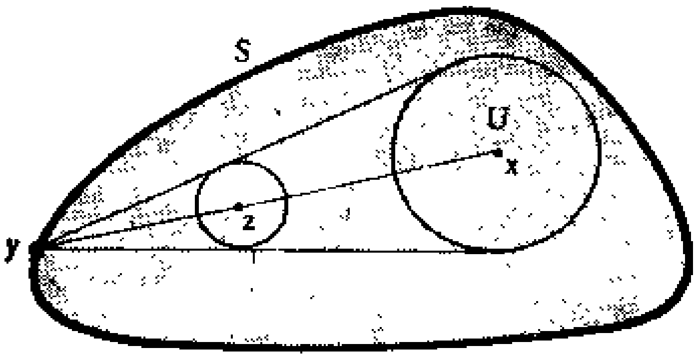


图 11.2.1.

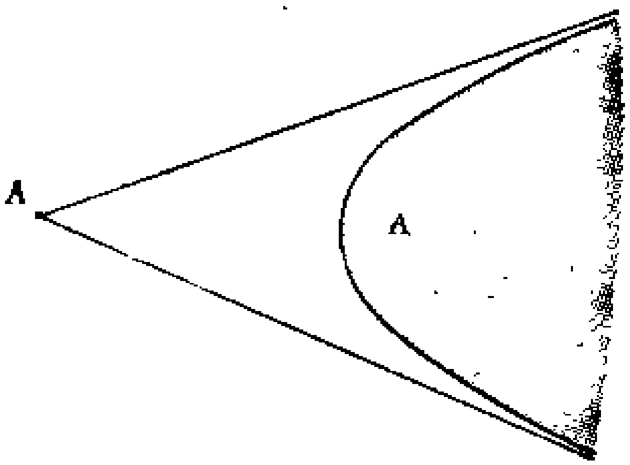


图 11.2.2.

11.2.2 不过要注意：如果 A 是闭的，$\mathscr{E}(A)$ 一般并不是闭的：见图 11.2.2，其中 A 是由一支双曲线的内部和此双曲线的中心所组成的。这也说明了我们为什么要引进下面的概念；那个命题则可直接由 11.2.1 导出。

11.2.3 定义和命题. 包含 A 的所有的凸闭集的交集称为子集 A 的凸闭包络。这个凸闭包络就是 $\overline{\mathscr{E}(A)}$.

11.2.4 引理. 设 S 是凸集，$x\in \mathring{S}$（S 的内部）并且 $y\in \bar{S}$，则 $]x, y[\subset \mathring{S}$（其中 $]x, y[$ 是开线段）.

事实上，如果 $z\in]x, y[$，并且 U 是 S 中含 x 的一个开集，则在以 y 为中心，把 x 变到 z 的位似变换下，U 的位似象是落在 S 内的。

11.2.5 推论. 若 S 是凸的，则 $\mathring{S}$ 也是凸的，且有 $\mathring{S}=\mathring{\bar{S}}$. 如果还有 $\mathring{S}\neq\varnothing$，则 $\bar{S}=\bar{\mathring{S}}$.

读者熟知：对于任意的子集，一般有 $\mathring{S}\neq\mathring{\bar{S}}$ 和 $\bar{S}\neq\bar{\mathring{S}}$（例如可参看图 11.1.2.4）。另一方面，即使对于凸集也有 $\bar{S}\neq\bar{\mathring{S}}$，例如 S 是 X 的一个超平面的情形。

为了知道一个凸集是否具有非空的内部，一个简单而有趣的判定准则是以下述定义作为基础的。

11.2.6 定义. 一个非空凸集 S 的维数就是由 S 生成的仿射子空间 $\langle S\rangle$ 的维数（参见 2.4.2.5），记作 $\dim S$：$\dim S=\dim\langle S\rangle$.

11.2.7 命题. 对于一个非空凸集，$\dim S=\dim X$ 等价于 $\mathring{S}\neq\varnothing$.

如果 $\mathring{S}\neq\varnothing$，例如根据 3.5.2 就有 $\dim S=\dim X$. 反过来，若 $(x_i)_{i=1,\cdots,d+1}$ 是 S 的一组仿射独立的点，则 $\dfrac{x_1+\cdots+x_{d+1}}{d+1}\in\mathring{S}$.

11.2.8 因此，我们可以引进凸集的相对内部的概念，它就是在由该凸集 S 所生成的仿射子空间中 S 的内部。

11.2.9 命题. 若 S 是一个紧凸集，则 $S=\mathscr{E}(\mathrm{Fr}\,(S))$.

设 $x\in S$，并且 D 是过 x 的任意一条直线；则 $D\cap S$ 是含 x 的一条线段 $[u, v]$，参阅 11.1.2.3. 因为 $u, v\in \mathrm{Fr}\ S$，故 $x\in\mathscr{E}(\mathrm{Fr}\,(S))$.

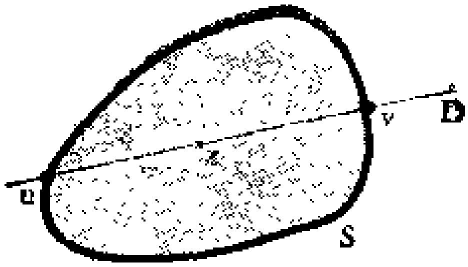


图 11.2.9.

11.3 凸集的拓扑

本节中，对凸集在不计同胚差别的意义下进行了分类；对其边界也进行了分类。所谓分类的含义将在行文的叙述中加以阐明.

11.3.1 命题. 设X是一个d维仿射空间，A是X的一个d维凸集，即$\dim A = \dim X = d$. 则$\mathring{A}$与$\mathbf{R}^d$同胚. 特别是，d维空间内一切非空的开凸集都是与$\mathbf{R}^d$同胚的.

11.3.1.1 为了进行讨论，赋予X一个以$O \in \mathring{A}$为原点的欧几里得向量空间结构，根据 11.2.7 这是可能的. 设S是A中的单位球面. 对$y \in S$，设$R(y)$是自原点O引出的过y的一条半直线；根据 11.1.2.3 和 11.1.2.7，$R(y) \cap A$是一个区间（包含O点，且为区间$[O, \varepsilon y[$，其中$\varepsilon > 0$）. 设$f(y)$是$R(y) \cap A$的与O点不同的

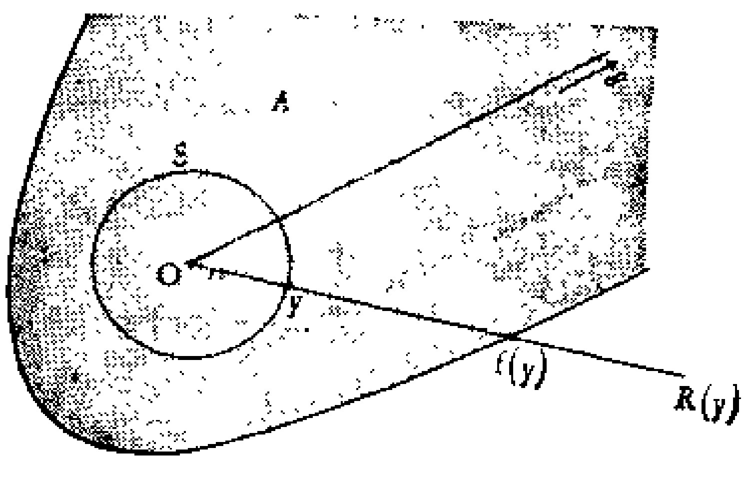


图 11.3.1.1.

另一个端点，它是 $R(y)\cap \mathrm{Fr}(A)$ 中唯一的一个点，其中 $\mathrm{Fr}(A)$ 表示 A 的边界. 令 $\delta(y)=\|f(y)\|$. 以上做法排除了 $R(y)\subset A$ 的情况，在此情况下，应令 $\delta(y)=\infty$，而 $f(y)$ 则没有定义.

11.3.1.2 证明 $\delta: S\to[0,\infty]$ 是连续的.

采用反证法. 首先考虑 $\delta(y)<\infty$ 的情形. 假设 (y_n) 是 S 的一个点列，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta(y_n)=\delta(y)$ 不成立，那么存在 (y_n) 的一个子序列，不妨仍记作 (y_n)，使得对任给的 $\eta>0$，有 $\delta(y_n)\leqslant\delta(y)-\eta$ 或 $\delta(y_n)\geqslant\delta(y)+\eta$. 而因为 $O\in\mathring{A}$，故存在 A 内一个开球 $U(0,\alpha)$ $(\alpha>0)$. 从而，A 包含图 11.3.1.2 中加细密点的区域，若 $\delta(y_n)\leqslant\delta(y)-\eta$，则得出矛盾. 如果 $\delta(y_n)\geqslant\delta(y)+\eta$，则因由 A 的凸性可推知图 11.3.1.3 中加细密点部分在 A 的内部，又产生矛盾. 对 $\delta(y)=\infty$ 的情形，我们利用图 11.3.1.4 中加细密点部分.

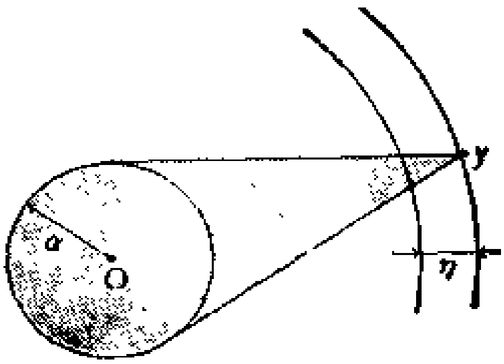


图 11.3.1.2.

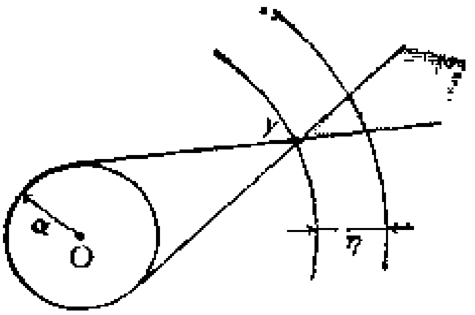


图 11.3.1.3.

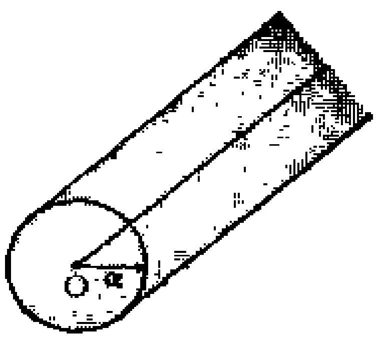


图 11.3.1.4.

11.3.1.3 为了完成证明，只要记住 $\mathbf{R}$ 中的区间 $[0, a[$ $(0 < a < \infty)$ 和 $[0, \infty[$ 是同胚的，并在必要时以连续的方式对 a 运用这一结论. 具体地说，上述的 $\mathring{A}$ 和 X 之间的同胚可定义为:

$$\begin{cases} x \longmapsto x & \text{当 } x = 0 \text{ 或 } x \neq 0 \text{ 而 } \delta\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) = \infty; \\ x \longmapsto \dfrac{\delta\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \cdot \|x\|}{\delta\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) - \|x\|} \cdot \dfrac{x}{\|x\|} & \text{其它的 } x. \end{cases}$$

11.3.2 附注. 由此推出，凸集的边界是零测度的(参见 2.7.4.3)：在每一条 $R(y)$ 上，$R(y) \cap \mathrm{Fr}(A)$ 仅有唯一的一点. 从而，是零测度的. 故我们可应用 Fubini 定理和 11.3.1.2. 在 12.9.2.4 节内能看到另外一种证法.

11.3.3 现在我们注意到，根据例 11.1.2.5，要想对任意凸集进行分类将是徒劳的，因此，在下面的阐述中作了一些限制. 由跟 11.3.1 同样的证明方法可得出下述推论:

11.3.4 推论. 如果 A 是一个有界的凸集，而且 $\dim A = \dim X = d$，则其边界 $\mathrm{Fr}\, A$ 恒与球面 S^{d-1} 同胚. 此外，如果 A 是紧的，则 A 与 d 维闭球同胚. 特别，当 $d = 2$ 时，$\mathrm{Fr}\, A$ 是一条简单闭曲线.

因为在这里 $\forall y \in S$ 有 $\delta(y) < \infty$，所以映射 $y \longmapsto f(y)$ 的逆映射就是所要找的与球面 S^{d-1} 的同胚；而 S 总是与 S^{d-1} 同胚的.

11.3.5 现在，如果凸集 A 是任意维的，即不必一定同外围空间 X 的维数相等. 把 11.3.1 或 11.3.4 应用于由 A 生成的仿射子空间即可看出，这样已经完全把开凸集和紧凸集进行了分类；如果 d' 是它们的维数，则它们分别同胚于 $\mathbf{R}^{d'}$ 和 $\mathbf{R}^{d'}$ 中的单位球.

11.3.6 关于星形集的注.

我们的目的是想让 11.3.1 的证明也适用于 X 的星形集 E(参见 11.1.2.4)，其中 E 是 $x \in \mathring{E}$ 处的一个星形集. 我们总可以在 X 上安装一个欧几里得结构，引入以 x 为中心的单位球面 S 和半直线 $R(y)$，$y \in S$. 只不过，现在区间 $R(y) \cap E$ 的端点(仍记作 $f(y)$)不再只是属于 $R(y) \cap \mathrm{Fr}(E)$ 的一点了；例如猫脸图形 11.1.2.4 中

猫的细须。我们称 $\{f(y): y\in S, \delta(y)<\infty\}$ 的全体集合为星形集 E 的凸包；于是，对于非凸的星形集，一般而言凸包和 $\mathrm{Fr}\,E$ 是不同的。此外，我们可以看到(图 11.1.2.4 或 11.3.6.1) δ 未必是连续的。即使当凸包是紧时，也是如此(在图 11.3.6.3 中，凸包是由两点组成的)。

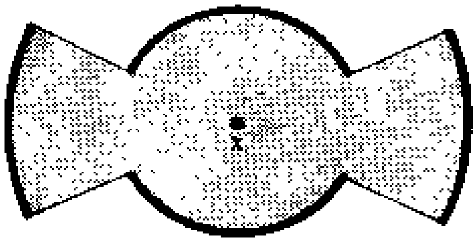


图 11.3.6.1.

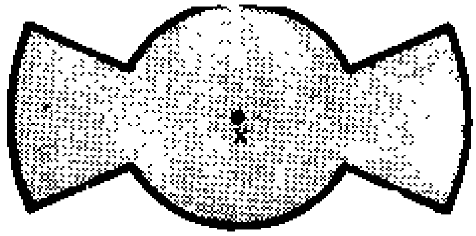


图 11.3.6.2.

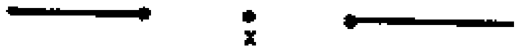


图 11.3.6.3

然而，上面所画的每个星形集看上去都同胚于 $\mathbf{R}^d$；情况确实如此：

11.3.6.1 定理. X 的任意一个开星形集与 X 同胚。

我们在所考虑的星形集 A 的中心处向量化 X. 如果 $X=A$，那就什么也不必证了。否则 $\mathrm{Fr}A\neq\varnothing$，因而可定义函数

$$\varphi:\ A\ni x\longmapsto\varphi(x)=d(x,\mathrm{Fr}(A))\in\mathbf{R}_+^*.$$

显而易见，φ 是连续的。定义映射 $F:\ A\to X$ 如下：

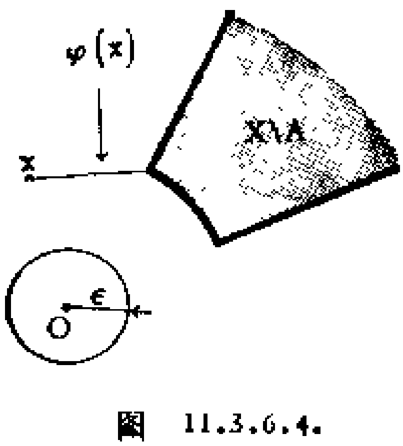


图 11.3.6.4.

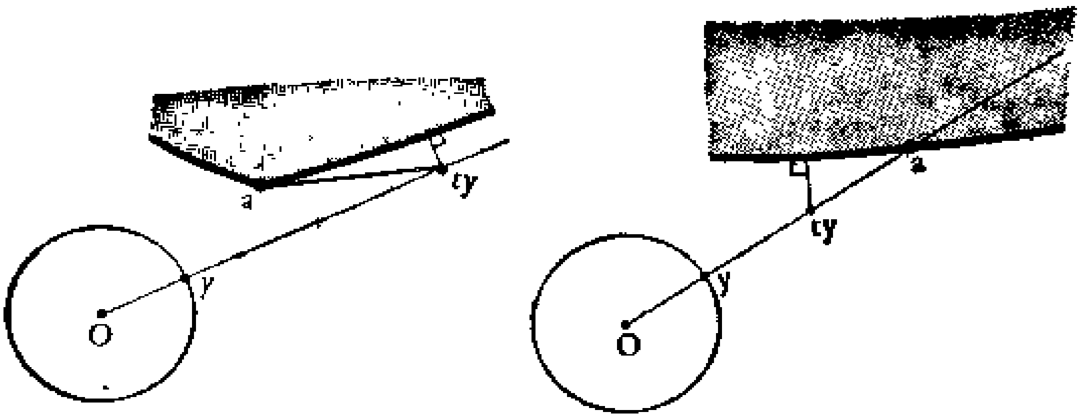


图 11.3.6.5.

11.3.6.2 $F(0)=0$. 而 $x \neq 0$ 时,

$$F(x)=\left[\int_0^{\|x\|} \frac{dt}{\varphi\left(\frac{t}{\|x\|} \cdot x\right)}\right] \cdot \frac{x}{\|x\|}.$$

映射 F 就是要找的同胚. 我们知道,这只要证明 F 是连续的、双射的和固有的(所谓固有的意即任意一个紧集的逆象也是一个紧集)就够了.

首先, F 是连续的: 当 $x \neq 0$ 时, 从 11.3.6.2 和 φ 的连续性可知 F 是连续的. 在 O 点, 由于 A 是开的, 故存在 $\varepsilon>0$ 和 $k>0$, 使对任意的 $x \in U(0, \varepsilon)$, 有 $\varphi(x) \geqslant k$. 因此 F 连续. 现在,关键之处是证明:

11.3.6.3 $\forall y \in S, \int_0^{\delta(y)} \frac{dt}{\varphi(ty)}=+\infty$,

这里, 沿用了 11.3.1 的证明中的记号. 分两种情形加以讨论: 如果 $\delta(y)=+\infty$, 设 a 是 $\operatorname{Fr} A$ 中任意一点. 则 $\varphi(ty)=d(ty, \operatorname{Fr}(A)) \leqslant d(ty, a) \leqslant t+\|a\|$, 由此推出

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{\varphi(ty)} \geqslant \int_0^{\infty} \frac{dt}{t+\|a\|}=+\infty.$$

如果 $\delta(y)=k<+\infty$, 则有 $\varphi(ty) \leqslant d(ty, ky)=k-t$, 仍得

$$\int_0^k \frac{dt}{\varphi(ty)} \geqslant \int_0^k \frac{dt}{k-t}=+\infty,$$

为了证明F是固有的;由于F已是连续的,而且我们是在有限维向量空间中进行研究，所以只要说明X的任一有界集的逆象是一个有界集就够了。这可从上述的强函数看出：在$\delta(y)=+\infty$的情形,是因为所得出的强函数对y是一致的,在$\delta(y)<+\infty$的情形,则是因为借助于$\delta(y)$,作为对y的单值函数的$\int_0^t \frac{dt}{\varphi(ty)}$是有强函数的。

11.3.6.4 注. 其实A甚至是与X微分同胚的。参见练习11.9.6。

11.3.6.5 推论. 设X是一个d维欧几里得仿射空间,S是以$x\in X$为中心的单位球面，并且C是以O为顶点的一个闭凸锥(参见11.1.6). 此外,假设存在$y\in S\cap C$,而$-y\notin S\cap C$,则$S\setminus(S\cap C)$与$\mathbf{R}^{d-1}$同胚。

置$M=S\cap C$和$y'=-y$. γ是以y, y'为端点的S上的任意一个半大圆. 对于$\gamma\cap M$,我们有$y\in\gamma\cap M$, $y'\notin\gamma\cap M$,且因

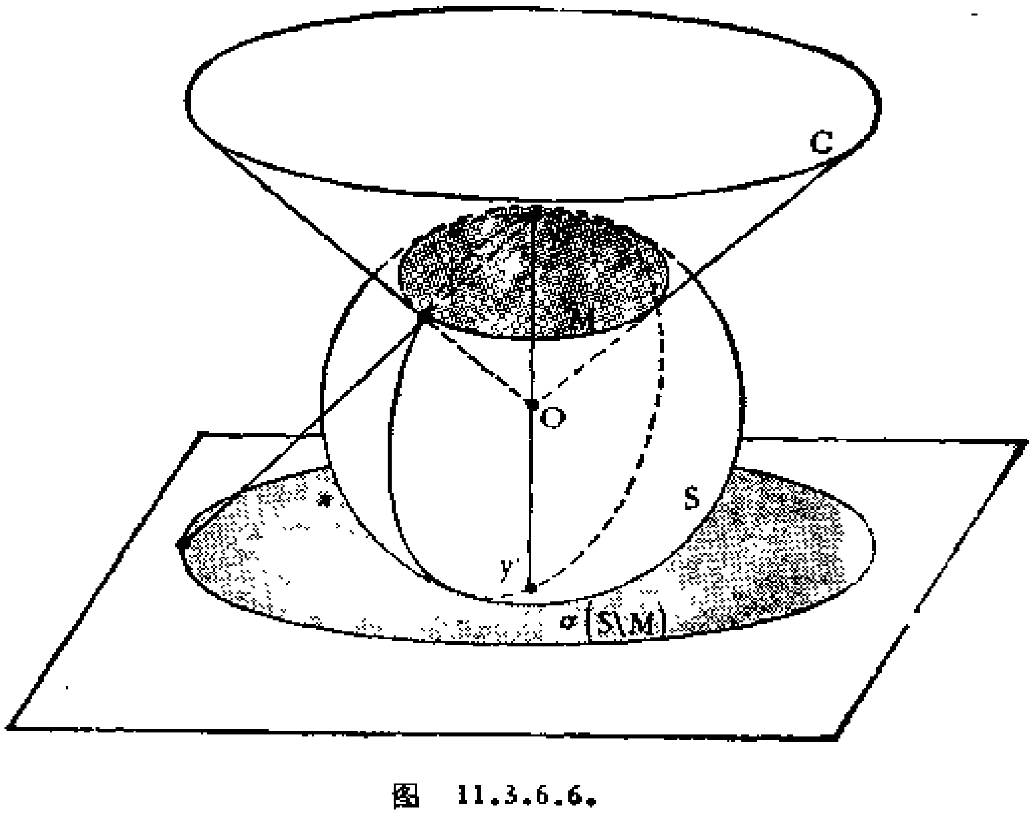


图 11.3.6.6.

C 是凸的，故 $\gamma \cap M$ 是连通的．从而 $\gamma \cap (S \setminus M)$ 是 γ 的一条半开弧 $[y', .[$．特别，如果 H 是 S 在 y' 点的切超平面，σ 表示 S 的以 y 为极点在 H 上的球极投影（参见 18.1.4.3），则前述论证表明，$\sigma(S \setminus M)$ 是 H 在 y' 处的一个星形子集，又因 C 是闭集，故它是开集．根据 18.1.5，从 11.3.6.1 即可推出 11.3.6.5．

11.3.7 在 11.3.5 中我们已把开凸集和紧凸集作了分类．现在，有待于考虑非有界的凸集．由图 11.1.1.1，11.1.1.3，11.1.1.6，11.1.1.5 可见，它们的边界分别同胚于 $\mathbf{R} \times \{-1, +1\}$，$\mathbf{R} \times S^1$，$\mathbf{R}$，$S^1$．这种现象是带有普遍性的：

11.3.8 命题． 设 A 是 X 的一个凸集，$\dim A = \dim X = d$，而且

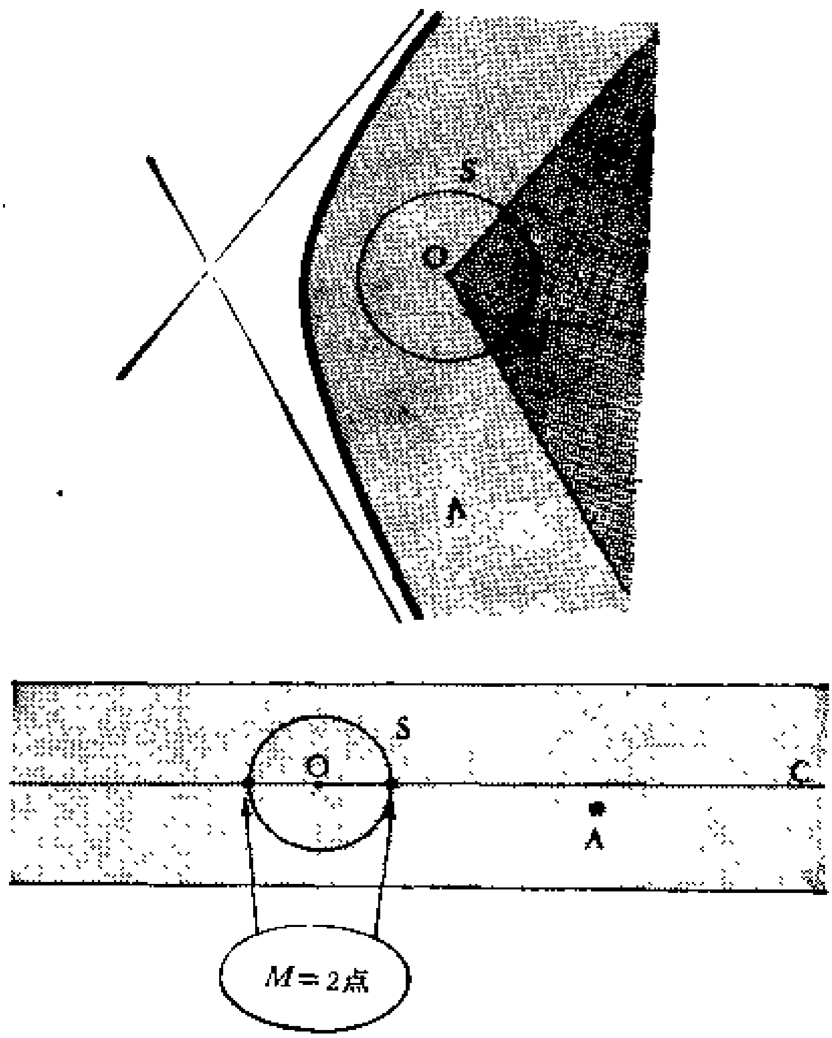


图 11.3.8.1．

$\mathrm{Fr}\,A = \varnothing$，则 $\mathrm{Fr}\,A$ 或同胚于 $\mathbf{R}^{d-1}$，或同胚于 $S^{d-r-1}\times\mathbf{R}^{r}$ $(0\leqslant r\leqslant d-1)$.

11.3.8.1 沿用 11.3.1.1 中的记号. 如果 A 是有界的，由 11.3.4 可知命题成立. 否则，置 $M=\{y\in S:\ \delta(y)=\infty\}$. 从 A 是凸的，推出 $C=\bigcup\limits_{y\in M}R(y)$ 是一个闭凸锥.

第一种情形是 $M\cap(-M)=\varnothing$，即 $\forall y\in M, -y\notin M$. 这时 M 不再含有两个对映点，这等价于 A 不包含经过 O 点的整条直线. 在此情形下，恰好推论 11.3.6.5 的假设条件都已满足，而 $\mathrm{Fr}\,A$ 同胚于 $S\backslash M$，从而同胚于 R^{d-1}.

11.3.8.2 第二种情形是存在 $y\in M$，使得 $-y\in M$，即 $A\supset D$，这里 D 是通过 O 与 y 两点的仿射直线. 设 V 是被包含在 A 内

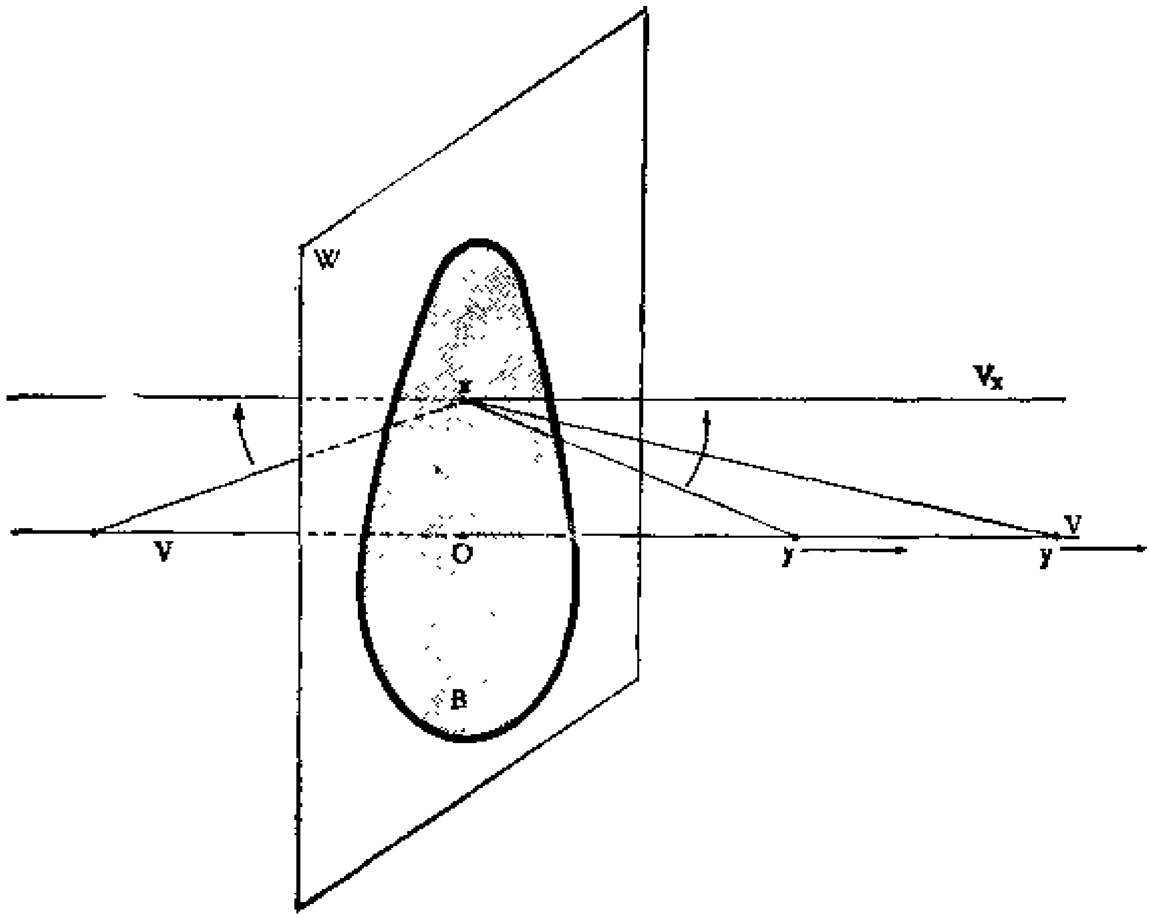


图 11.3.8.2.

的维数最大（设为 $r \geqslant 1$）的仿射子空间，显然，$r \leqslant d-1$，不然的话，因为 $A = X$，就有 $\mathrm{Fr}\, A = \varnothing$. 设 W 正交于 V；则 W 是 $d-r$ 维仿射子空间，并且 $W \cap A = B$ 是 W 的一个凸集. 如果 $x \in W$，取一点 $y \in V$，让 y 在 V 内按一切可能的方式趋向于 ∞；因为 $[x, y] \subset A$ 和 $V \subset A$，取极限后可知：$\bar{A}$ 包含任意的 V_x，这里 V_x 是过 x 平行于 V 的仿射子空间. 由此得出 $\bar{A} \supset V \times B$；同样可证，$\bar{A} \subset V \times \bar{B}$. 因为 $\mathrm{Fr}\, V = \varnothing$，故有

$$\mathrm{Fr}\, A = \mathrm{Fr}\, \bar{A} = \mathrm{Fr}\,(V \times \bar{B}) = V \times \mathrm{Fr}\, \bar{B} = V \times \mathrm{Fr}\, B,$$

既然由 V 的最大性可推知，对 B 来说又属于"无对映点"的第一种情形，故从 11.3.4 或者从 11.3.8.1 即可证得本命题.

11.3.9 附注. 11.3.8.2 的证明技巧是带有普遍意义的；最近，在黎曼流形的某些研究中也用到了它：参阅 [C-G] 或 [SGR].

11.3.10 附注

11.3.10.1 欧几里得平面 X 上的一条凸曲线，定义为 X 的一个二维凸集的边界. 命题 11.3.8 表明：一条凸曲线或同胚于圆 S^1，或同胚于直线 $\mathbf{R}$. 请与一维微分流形的分类加以比较，例如可参看 [B-G] 第 127 页. 读者也可用现在的观点去研究 [B-G] 中定理 9.6.2 的证明；参看下面 11.5.4.

11.3.10.2 三维欧几里得空间中的一个凸曲面是一个连通集，按定义它是该空间中一个三维凸集的边界. 因而这样的曲面总是（参见 11.3.8）或同胚于 $\mathbf{R}^2$，或同胚于 $S^1 \times \mathbf{R}$（圆柱面），或同胚于 S^2. 凸曲面是很有意义的研究对象：特别可参看 [PV 1] 或者 [BU 1]，[AW]. 对于可微的情形，参看 [DE 6] 第 344 页，练习 3.

11.3.10.3 最后，从 11.3.8 容易推出闭凸集的拓扑分类.

11.4 凸集和超平面；分离定理

整个这一节是以下述定理作为基础的.

11.4.1 Hahn-Banach 定理. 设 X 是仿射空间，A 是 X 的一

个非空凸开集，且 L 是 X 的一个仿射子空间，使得 $A\cap L=\varnothing$，则存在 X 的一个超平面，它包含 L 且与 A 不相交.

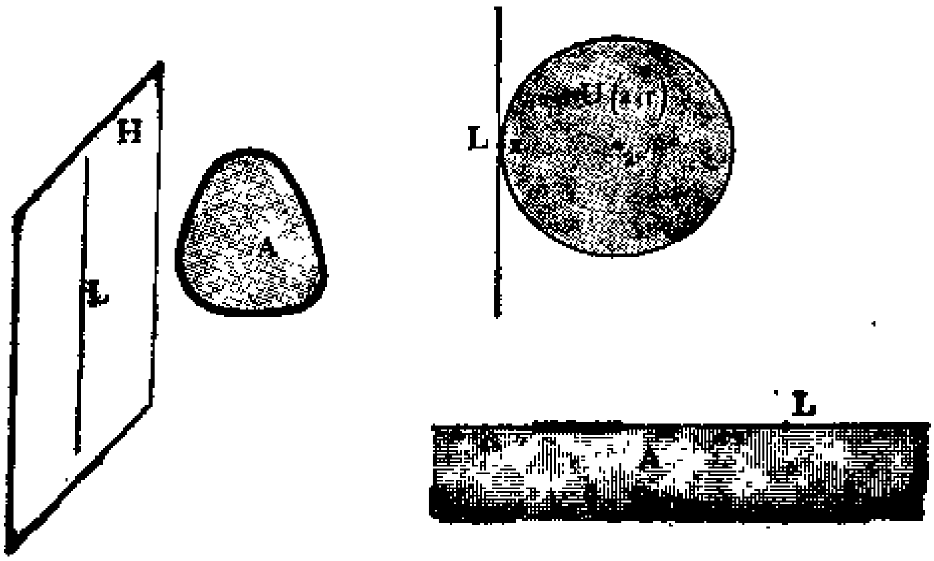


图 11.4.1.1.

A 是开集这个条件不能去掉：取一个开的半平面并添上一条边界线段作为 A，在这边界线段上取一点作为 L，即可作为一个反例. 也可看练习 11.9.9.

请注意，这样的一个定理并不是显而易见的. 这是因为，比如取 A 为一个开球 $U(a,r)$，$L=\{x\}$，使 $x\in S(a,r)$，则得到的超平面是唯一的，它是 $S(a,r)$ 在 x 点的切超平面(参见 10.7.4).

11.4.1.1 证明的第一步在于把它归结为平面的情形. 设 $M\supset L$ 是使 $M\cap A=\varnothing$ 的最大维数的子空间，则必须证明 M 是一个超平面. 用反证法证明之. 首先，在原点 $O\in L$ 向量化 X，并设 $p:X\to X/M$ 为在商空间 X/M 上的典范投影，此时 $p(A)$ 仍是一个开凸集 (11.1.2.6)，而且 $O\notin p(A)$. 设 $Z\subset X/M$ 是一个二维向量子空间，并和 $p(A)$ 相交，则 $B=p(A)\cap Z$ 为非空开凸集；这样的 Z 是存在的，因为由反证法假设条件，有 $\dim(X/M)\geqslant 2$.

11.4.1.2 现在需要证明：Z 内经过 O 点的任意直线都与 B 相交 (B 是 Z 的开凸集，且 $O\notin B$) 是会引出矛盾的.

粗略地说，如果在 Z 上引入一个任意的欧几里得结构，则经过

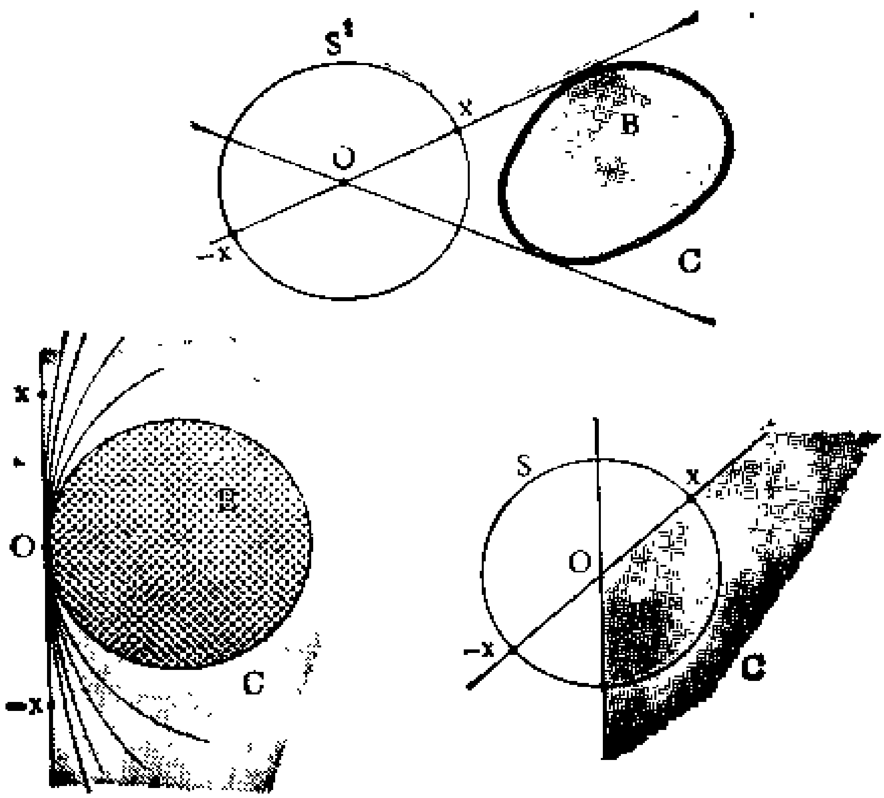


图 11.4.1.2.

O 点并与 B 相交的向量半直线都在 Z 的单位圆 S^1 上截得一段弧，其中包含两个对映点，因为不然的话，连接这两个对映点的直线就会表明 $O\in B$. 因为 B 是凸集，截得的弧是连通的，故知其长度小于 π，由此可知，一条直线是不可能与它相交的，矛盾。现在，我们所要做的工作只不过是把上述想法写成严密的形式。

引入锥 $C=\bigcup\limits_{\lambda>0}\lambda B$；它是开的、凸的（证明是容易的，读者自证之），$O\notin C$（在图 11.4.1.2 的情形．$B$ 是边界包含 O 点的开的圆盘，C 是一个半平面！）．在 $Z\backslash O$ 内至少存在 C 的一个边界点 x（不然的话，$C\backslash O$ 就将整个是 $Z\backslash O$ 的一个连通分支——对于 $\mathbf{R}\backslash O$ 也是如此——然而由 $\dim Z=2$ 可知 $Z\backslash O$ 是连通的，参见 8.3.8）．因此由 C 是开的可知 $x\notin C$，但是又有 $-x\notin C$，这是因为否则可由 $-x\in\dot{C}$ 和 $x\in\bar{C}$ 推出 $O\in\dot{C}$，参见 11.2.4．但现在通过 x 和 O 的直线整个在 C 的外面，当然在 B 的外面：这样就得出矛盾。

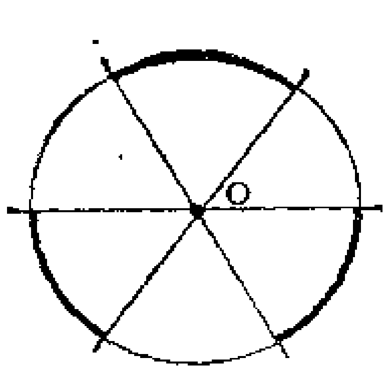


图 11.4.1.3.

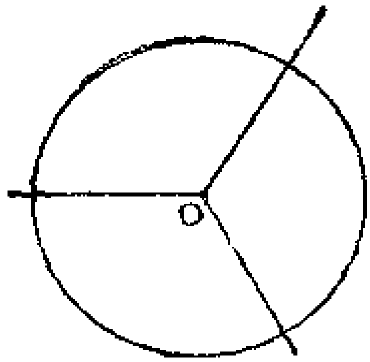


图 11.4.1.4.

11.4.2 Hahn-Banach 定理在泛函分析中有重要的应用，其关键乃是超平面和线性形式之间有着对应关系．例如参看［LG 2］第186页，［M-T］第23页，［Bl 3］第65页．

我们下面只考虑 Hahn-Banach 定理的"几何"应用．

11.4.3 定义． 设X是一仿射空间．A和B是X的两个子集，H是一个超平面．我们称H分离A和B，意指A在由H所决定的一个半空间内，而B在另一个半空间内．如果上述的半空间均是开的，则称H严格分离A和B．

11.4.4 推论． 设A，B是仿射空间X内两个非空凸集．A是开的，且$A\cap B=\varnothing$，则存在一个超平面分离A和B．

向量化X，并应用11.1.3.1于$C=A-B$；则可得到一个凸集，它是开的（作为开集的并集），且因$A\cap B=\varnothing$，故$0\notin C$．再应用11.4.1于C和仿射子空间$\{0\}$即可．

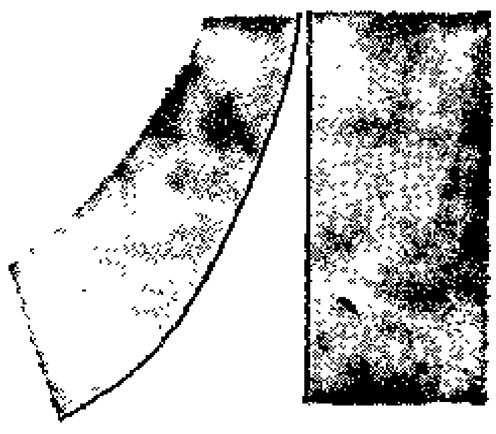


图 11.4.5.

因为H是由它决定的每一个半空间的边界，可见有：

11.4.5 推论． 设在一个仿射空间内有两个非空、不相交的开凸集，则存在一个超平面把它们严格分离．

对于两个闭集，这个推论是不成立的，图 11.4.5 说明了这一点。相反地，如果两个闭集中有一个是紧的，则有：

11.4.6 推论. 如果 A 和 B 是两个凸集，A 是非空闭集，B 是紧集，且 $A\cap B=\varnothing$，则存在一个超平面把它们严格分离。

事实上，利用一般拓扑学可证：存在一个开球 $U(a,\varepsilon)$，$\varepsilon>0$，使得 $(A+U(a,\varepsilon))\cap(B+U(a,\varepsilon))=\varnothing$；而后面两个集合满足 11.4.5 中的假设条件。

对于一般的两个闭凸集，仅仅有：

11.4.7 推论. 若 A，C 是两个非空、不相交的闭凸集，则存在一个超平面把它们分离。

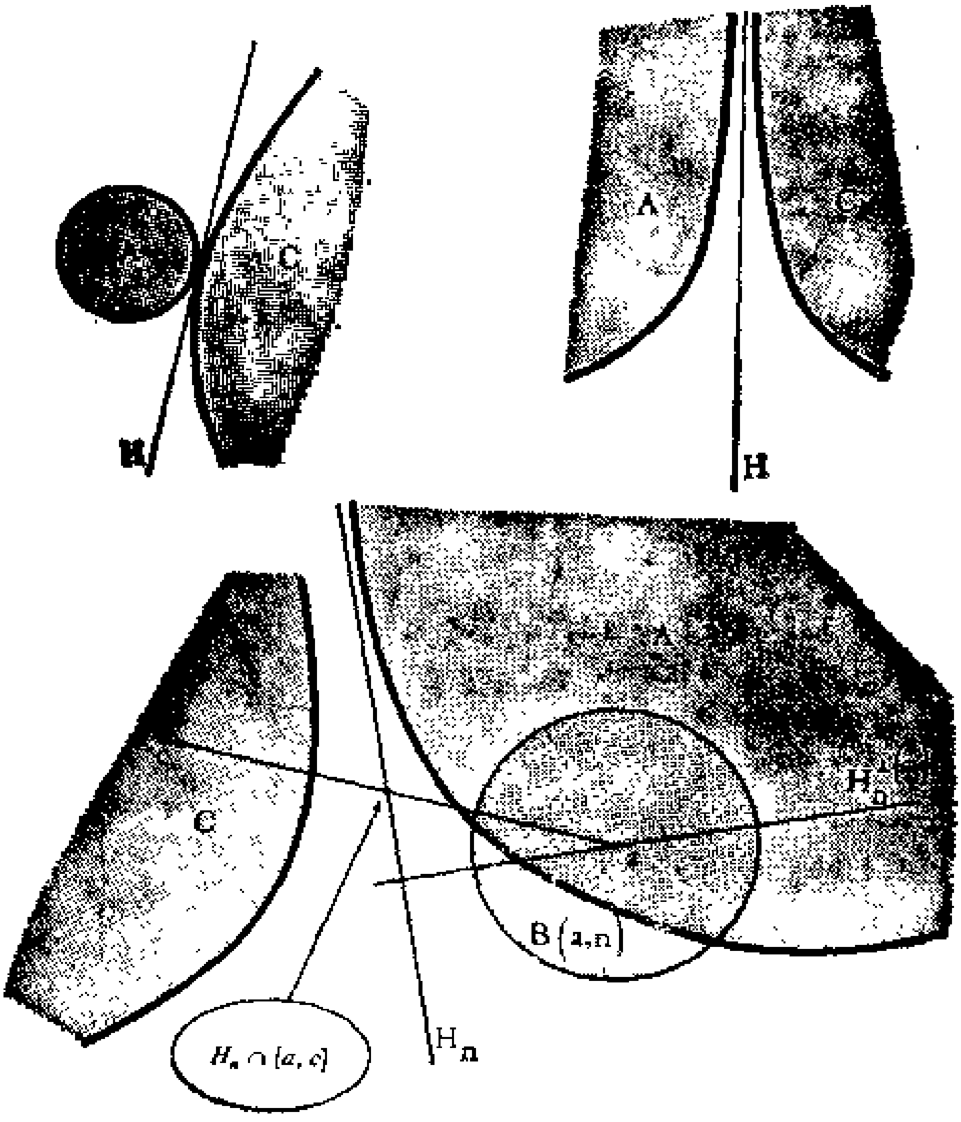


图 11.4.7.

为了便于讨论，在仿射空间上放上一个欧几里得结构。设 $a\in A$，引入闭球 $B(a,n)$，$n\in\mathbf{N}$。根据假设，对于任意的 n，两个凸集 $A\cap B(a,n)$ 和 C 满足 11.4.6 中的假设条件；设 H_n 是分离这两个凸集的超平面。只要证明能从序列 H_n 中抽出一个子序列收敛于一个超平面就够了。首先，我们能找到一个子序列，其正交方向是收敛的，这是因为空间中过 a 的直线的投影是紧的（参见 4.4.3）；于是只要找出一个子序列的子序列收敛就行了。然而若 $c\in C$ 是任意一点，由于 $[a,c]$ 是紧的，点列 $H_n\cap[a,c]$ 即为所求的子序列。

现在，我们可以研究 11.1.5 中引入的 $*$ 运算了：

11.4.8 命题. 设 X 是以 0 为原点的欧几里得向量空间。

(i) 如果 A 是有界的，则 $0\in\mathring{\widehat{A^*}}$；如果 $0\in\mathring{A}$，则 A^* 是有界的；

(ii) 如果 A 是含 0 点的一个凸闭集，则 $A^{**}=A$。

事实上，若对 $r>0$ 有 $A\subset B(0,r)$，则 $A^*\supset(B(0,r))^*=B(0,r^{-1})$。同样，如果存在 $r>0$，使得 $B(0,r)\subset A$，则 $A^*\subset(B(0,r))^*=B(0,r^{-1})$。现在，设 A 是含 0 点的闭凸集；首先，由定义 11.1.5.1 有 $A\subset A^{**}$。设 $a\notin A$；则根据 11.4.6 存在一个超平面 H 严格分离 A 和 a，尤其有 $0\notin H$。设 h 是 H 的极点（参见 10.7.11），即 $H=\{z\in X;\ (z|h)=1\}$；则 $\forall x\in A$，有 $(a|h)>1$ 以及 $(x|h)\leqslant 1$，因此 $a\notin A^{**}$，即 $A^{**}\subset A$。

11.5 支撑超平面；应用

A 是凸集、$B=\{x\}$ 且 $x\in A$ 的情形，是一种重要的分离的情形，由它引出下述定义：

11.5.1 定义. 设 A 是仿射空间 X 的任意一个子集。若 H 是任意一个含点 $x\in A$ 的超平面，而且 H 分离 $\{x\}$ 和 A，则称 H 是 A 的支撑超平面。H 也称为 A 在点 x 处的支撑超平面。

据 11.4.5 前的论述，如果 H 是凸集 A 的一个支撑超平面，则

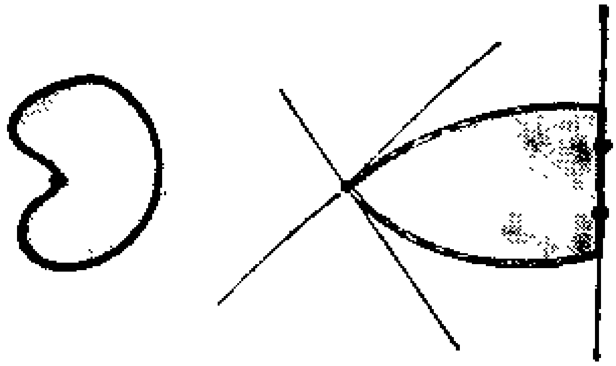


图 11.5.1.

$H \cap \mathring{A} = \varnothing$；另一方面，如果$H$是点$x$处的支撑超平面，则必有$x \in \operatorname{Fr} A$。

上述诸图形表明：在一点x处的支撑超平面并不一定存在；也可能不是唯一的，也可能支撑点不止一个。对此在11.6中将进一步阐明。

11.5.2 命题. 设A是一个闭凸集，则经过A的边界上的每一点，有一个在该点处的支撑超平面。

事实上，如果$x \in \operatorname{Fr} A$，则$\{x\} \cap \mathring{A} = \varnothing$；对$L = \{x\}$应用定理11.4.1即可。

可以证明，在$\operatorname{Fr} A$和支撑超平面上的点之间，有一个11.1.5.1中引进的配极对偶关系。

11.5.3 命题. 设X是以O为原点的欧几里得向量空间．A是一个闭凸集，且$O \in \mathring{A}$，则$\operatorname{Fr} A$上点的所有配极超平面构成A^*的支撑超平面集合．此外，如果$x \in \operatorname{Fr} A$以$H$作为配极超平面，则$H$的支撑点全体就是$A$在点$x$处支撑超平面的极点集合。

设$x \in \operatorname{Fr} A$．根据定义11.1.5.1，$A^*$被包含在由$H$决定的半空间内，这里$H$是$x$的配极超平面（参见10.7.11）．同样，如果$T$是$A$在点$x$处的一个支撑超平面，且$p$是它的极点，则有$p \in H$（参见10.7.11），且因$A^{**} = A$以及$A$落在由$T$决定的含$O$点的半空间内，故$p \in A^*$．因此，$H$是$A^*$在点$p$处的一个支撑超平面．因为$A^{**} = A$，这样我们就得到了$A^*$的所有的支撑超平面。

现在，我们可以将11.1.7.4中的说明补充完整了：

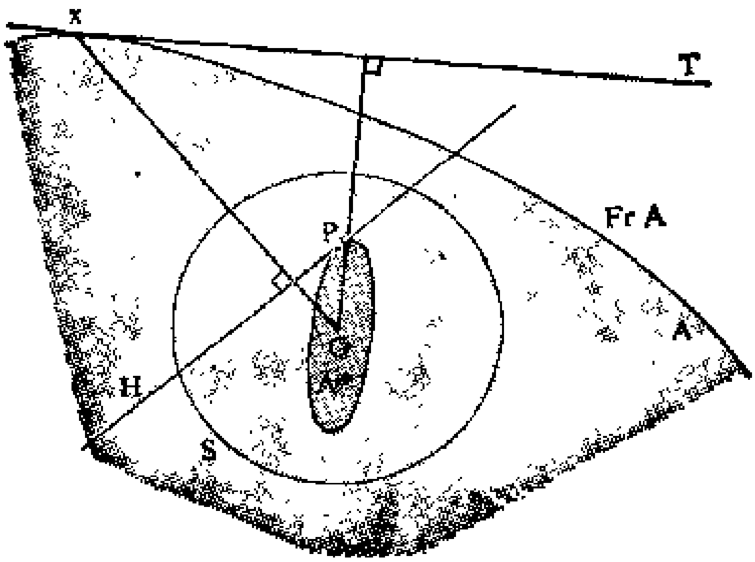


图 11.5.3.

11.5.4 命题. 设 A 是一个内部非空的闭集. 如果 A 的边界上每一点具有一个支撑超平面,则 A 是一个凸集.

采用反证法. 设 $x\in\mathring{A}$, $y, z\in A$, 并且 $t\in[y, z]$ 但 $t\notin A$. 既然 $t\notin A$ 且 $x\in\mathring{A}$, 线段 $[x, t]$ 和 $\mathrm{Fr}\,A$ 至少相交于一点 $u\in\,]x, t[$, 设 H 是 A 在点 u 处的一个支撑超平面; 则它在由 x, y, z 所生成的仿射平面上的迹线是过 u 点的一条直线. 而过 u 点的任意一条直线总在三角形 $\{x, y, z\}$ 的内部,因而严格地分离了 x 和 y 或严格地分离了 x 和 z.

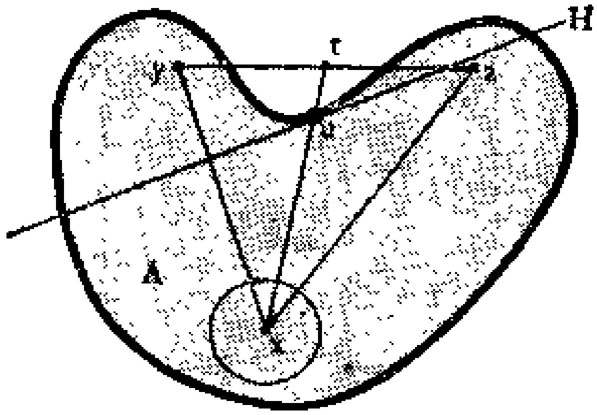


图 11.5.4.

内部非空这一条件是重要的: 参看图 11.5.5. 请把此证法同 [B-G] 第 358 页中的直接证法比较一下.



图 11.5.5.

现在,我们能够兑现 11.1.7.4 中的说法了:

11.5.5 命题. 设 A 是一个凸闭集;则 A 是所有包含 A 的闭半空间

的交集.

设 $\mathscr{E}'(A)$ 是此交集:它是含 A 的一个闭凸集(参见 11.1.2.7). 设 $x\in\mathscr{E}'(A)\backslash A$, 对 A 和 $B=\{x\}$ 应用 11.4.6 即得出矛盾.

11.5.6 注. 有一个比 Hahn-Banach 定理更初等的方法，揭示了 A 中子集的支撑超平面的性状,而且其中 A 是凸的或非凸的:

11.5.6.1 设 A 是 X 的一个紧集, V 是 X 的一个超平面方向(参见 2.4.1), 则至少存在一个与 V 平行的 A 的支撑超平面.

事实上, 设 p: $X\to X/V$ 是 X 在商空间 X/V 上的投影(参见 2.2.4), 则 $p(A)$ 是仿射直线 X/V 上的一个紧集. 如果 α 和 β 是它们的边界(可能重合), $p^{-1}(\alpha)$, $p^{-1}(\beta)$ 是与 V 平行的超平面, 并且它们是 $p^{-1}(\alpha)\cap A$ 或 $p^{-1}(\beta)\cap B$ 中任一点处的支撑超平面.

11.5.6.2 此证明还表明: 如果 $\mathring{A}=\emptyset$,则至少存在两个这样的超平面. 相反,如果 A 是闭的、非紧的, 则这样的超平面可能不存在: 见图 11.5.6.2.

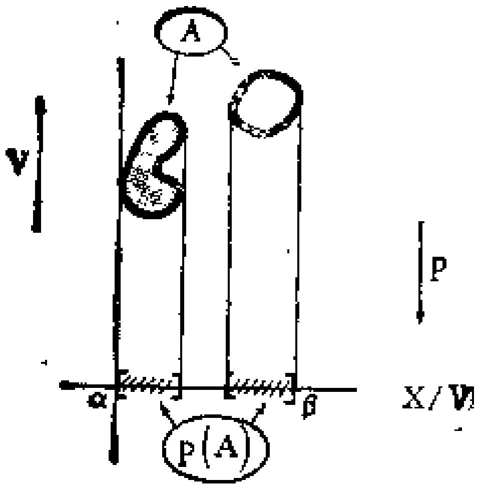


图 11.5.6.1.

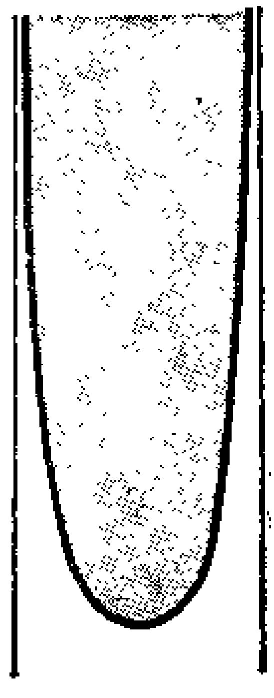


图 11.5.6.2.

11.5.6.3 如果 X 还是欧几里得空间, 则 X/V 有一个自然的欧几里得结构,紧集 $p(A)$ 的长度(即直径)称为在直线 $\xi=V^{\perp}$ 方

向上的A的宽度，记作 $\text{larg}_\xi A$。常宽度的凸集已成为许多研究工作的主要对象；在这方面有好多未曾解决的问题，即使对于二维的情形也是如此。在 12.10.5 里我们将计算一条常宽度曲线的长度；有关图形和参考文献可参看该节。

11.5.6.4 同支撑超平面有联系的另一个概念是支撑函数：看 11.8.12.3。

11.5.7 凸性的概念可使我们对欧几里得空间中"包含一个已给紧集的最小球"问题给予确切的说明。

11.5.8 定理 (Jung). 设A是d维欧几里得仿射空间X的一个紧集。则A被包含在唯一的一个半径最小的球内。此外，如果此球的中心为x，半径为r，则有

(i) $r \leqslant \sqrt{\dfrac{d}{2(d+1)}} \cdot \operatorname{diam}(A)$,

此不等式是所有可能的估计中最好的结果。

(ii) $x \in \mathscr{E}(A \cap S(x, r))$。

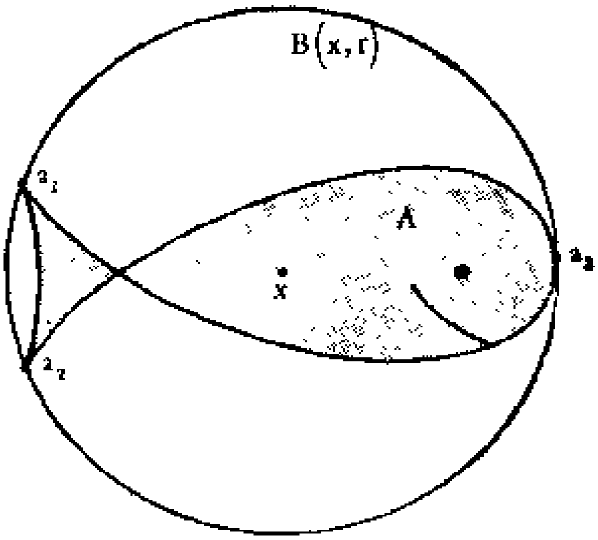


图 11.5.8.1.

对于任意的$t \geqslant 0$，置 $Y_t = \{y \in X : B(y, t) \supset A\}$。因为$A$是有界的，所以 $T = \{t \in R : Y_t \neq \emptyset\} \neq \emptyset$。另外由 $t \leqslant t'$ 可推出

$Y_t \subset Y_{t'}$，且 Y_t 紧致．因为紧集的递减序列的交集是非空的(参见 0.4)，故若令 $r = \inf T$，就有 $Y_r = \bigcap_{t>r} Y_t \neq \emptyset$。

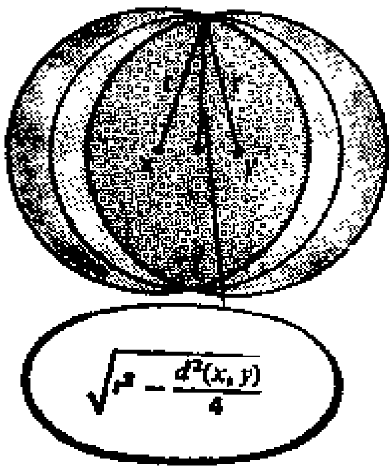


图 11.5.8.2.

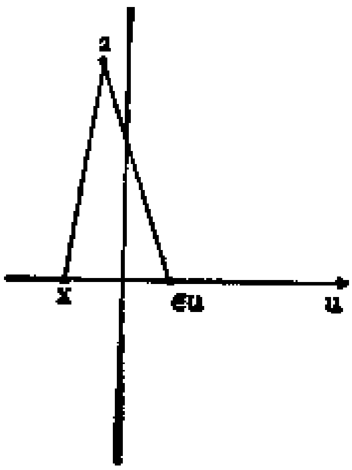


图 11.5.8.3.

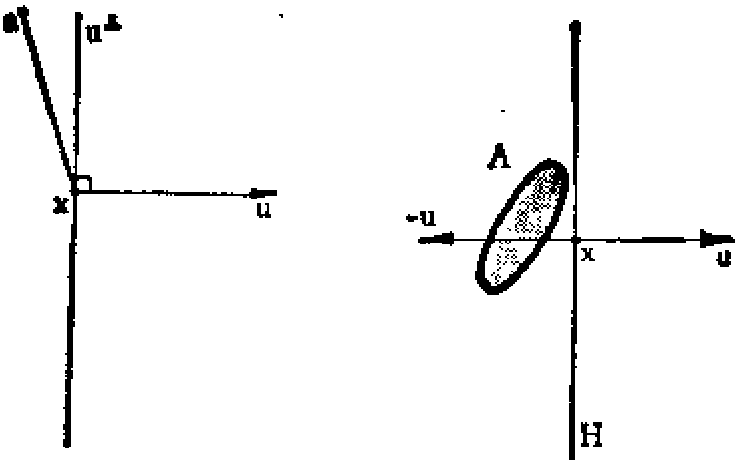


图 11.5.8.4.

如果 $x, y \in Y_r$，且 $x \neq y$，则产生矛盾(图 11.5.7.1)：
$\sqrt{r^2 - \frac{\overline{xy}^2}{4}} < r$，同时 $\sqrt{r^2 - \frac{\overline{xy}^2}{4}} \in T$；于是，$Y_r = \{x\}$。

现在还须证明 (i) 和 (ii)．为了进行这一工作，在 x 处向量化 X．设 $u \in S(x, 1)$，$\varepsilon > 0$ 任意；根据 x 和 r 的定义，我们有：

$$\exists\ a \in A \mid d(x, a) \leqslant r < d(a, \varepsilon u).$$

因为 A 是紧的，令 $\varepsilon \to 0$ 并求极限，则对任意的 $u \in S(0,1)$ 可找到一点 $a \in A$，使得 $(a|u) \leqslant 0$ 和 $d(x,a) = r$。由此即推得 (ii)，因为，如果 $x \notin \mathscr{E}(A \cap S(x,r))$，则将存在一个超平面 H 严格分离 x 和 $A \cap S(x,r)$（应用 11.4.6），而把前述结果同时应用于 u 和 $-u$ 有：

$$\{u\} \cup \{-u\} = S(x,1) \cap H^{\perp}，得出矛盾。$$

为了证明 (i)，我们利用 Carathéodory 定理 11.1.8.6：

$$x = \sum_i \lambda_i a_i,\quad \lambda_i \geqslant 0,\quad \sum_i \lambda_i = 1,\quad (a_i)_{i=1,\cdots,d+1} \subset S(x,r) \cap A.$$

特别，对于任意的 $i \neq j$，$d(a_i, a_j) \leqslant \delta = \operatorname{diam}(A)$。

首先固定一个 i：$1 - \sum_{j \neq i} \lambda_j = \lambda_i$，则因 $d(a_i, a_i) = 0$ 就有

$$(1 - \lambda_i)\delta^2 \geqslant \sum_{j \neq i} \lambda_j d^2(a_i, a_j) = \sum_j \lambda_j d^2(a_i, a_j)\text{；}$$

然而，

$$d^2(a_i, a_j) = \|a_i\|^2 + \|a_j\|^2 - 2(a_i|a_j) \geqslant 2r^2 - 2(a_i|a_j),$$

由此推出：

$$(1 - \lambda_i)\delta^2 \geqslant \left(\sum_j \lambda_j\right) 2r^2 - 2\left(a_i \middle| \sum_j \lambda_j a_j\right) = 2r^2 - 2(a_i|x) =$$

$2r^2$（因为在 x 处的向量化空间 X 中有 $x = 0$）。对 i 从 1 到 $d+1$ 求和，得 $\sum_i (1-\lambda_i)\delta^2 = d \cdot \delta^2 \geqslant 2(d+1)r^2$，(i) 得证。仅当对任意 $i \neq j$，$d(a_i, a_j) = \delta$ 成立时，才能取等号。对在 $\mathbf{R}^{d+1}$ 中 d 维超平面：$\sum_i \lambda_i = 1$ 上考虑的正则单形 $S_d = \left\{(\lambda_1, \cdots, \lambda_{d+1}) \in \mathbf{R}^{d+1}:\ \lambda_i \geqslant 0\ \forall i,\ \sum_i \lambda_i = 1\right\}$（参见 12.1.2.5），则等号总是成立的。

11.5.9 附注

11.5.9.1 定理 11.5.8 还提供了正则单形 S_d 外接球面的半径的计算法（参见 9.7.3.7）。也可参看 11.9.18。

11.5.9.2 除正则单形外，(i) 中等式对其它的 A 也可能成立，

例如 Reuleaux 三角形：图 12.10.5.1。

11.5.9.3 值得注意：与 A 典范相连的点 x，一般来说与 A 的重心是不同的(参见 2.7.5.6)。

11.5.9.4 也要注意(图 11.5.9) 有可能

$\#(S(x,r)\cap A)<d+1$ (即证明中的某些 a_i 可能是重合的)。

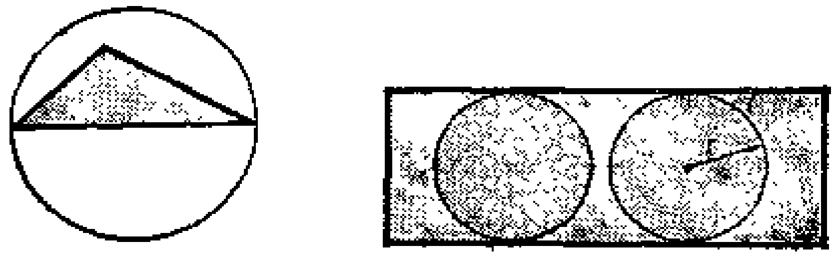


图 11.5.9.

11.5.9.5 我们也可以研究包含在已给紧集 A 内的半径最大的球：这时，可找到一个最大的半径，但是，不再是唯一的了。借助于 A 的最小宽度，对于这一最大半径同样可作出一个不等式：参见 11.9.12 或 [EN] 第 112 页。

11.5.9.6 也请参见 11.9.23。

11.6 凸集的边界，顶点，端点

现在，我们来研究一个凸集的不同类型的边界点。

11.6.1 定义. 设 A 是 X 的一个 d 维闭凸集，且 $x\in \mathrm{Fr}\,A$。所谓 x 的阶为 α，意即 A 在点 x 处的所有的支撑超平面的交集作为仿射子空间其维数为 α。若 x 的阶 $\alpha=0$，则称 x 是 A 的一个顶点；而若 $\alpha=d-1$ (即点 x 处的支撑超平面是唯一的)，则称 A 在点 x 处是光滑的。

图 11.6.1.1 表示一个圆；其上每一点都是光滑的，连顶点一个也没有．单形 11.6.1.2 具有阶数为 0，1，2 的边界点；更一般地，一个 d 维单形具有阶数为 $0,1,\cdots,d-1$ 的边界点；任意一个多胞

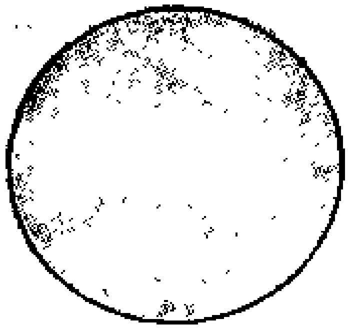


图 11.6.1.1.

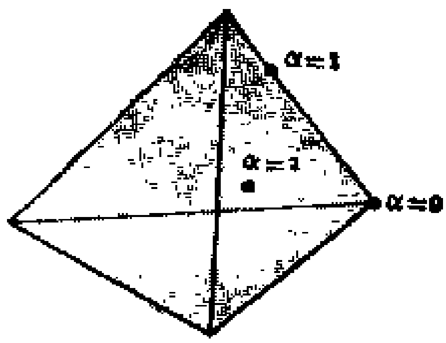


图 11.6.1.2.

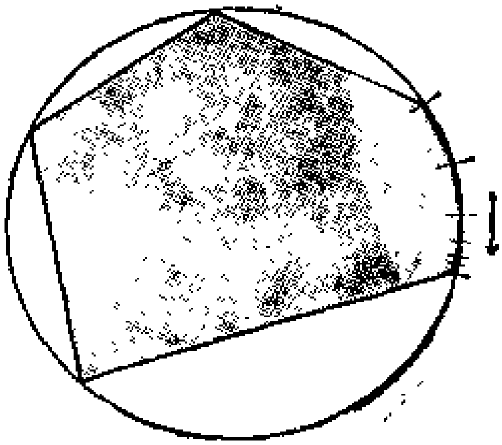


图 11.6.1.3.

形也是如此，参看 12.1.9。图 11.6.1.3 表示具有无限多个顶点的一个凸集。然而，一个凸集不可能有过多的顶点。

11.6.2 命题. 凸集的顶点总是可数的。

赋予 X 一个欧几里得结构。对于任意 $x \in \mathrm{Fr}\,A$，设 CN_x 是如下定义的 A 在点 x 处的法锥：CN_x 是自始点 x 引出的所有这样的半直线的并集，这些半直线同 A 在点 x 处的支撑超平面正交，并位于 A 所不在的超平面的那一边；换言之：

$$CN_x = \{y \in X:\ (\overrightarrow{xy} \mid \overrightarrow{xz}) \leqslant 0 \quad \forall z \in A\}.$$

如果 A 在点 x 处是光滑的，则锥 CN_x 缩成为一条半直线；否则，称 x 是一个顶点就等价于 $\overset{\circ}{\widehat{CN_x}} \neq \emptyset$。取定 $a \in X$，让 x 取遍 X 的所有顶点，将 CN_x 平移成以 a 为顶点的 CN'_x。由 A 的凸性推知

$\forall x \neq y\ \mathring{\widehat{CN}}_x \cap \mathring{\widehat{CN}}_y = \emptyset$；事实上，不然的话将存在 $z \in X$，使得三角形 xyz 在 x 处和 y 处的角度为锐角：$(\overrightarrow{xy}|\overrightarrow{xz})>0$ 和 $(\overrightarrow{yx}|\overrightarrow{yz})>0$，与法锥的定义矛盾。

由古典知识可知，CN'_x 是可数多个(因为在 X 内放上一个可数点集，它在 X 内是处处稠密的)。

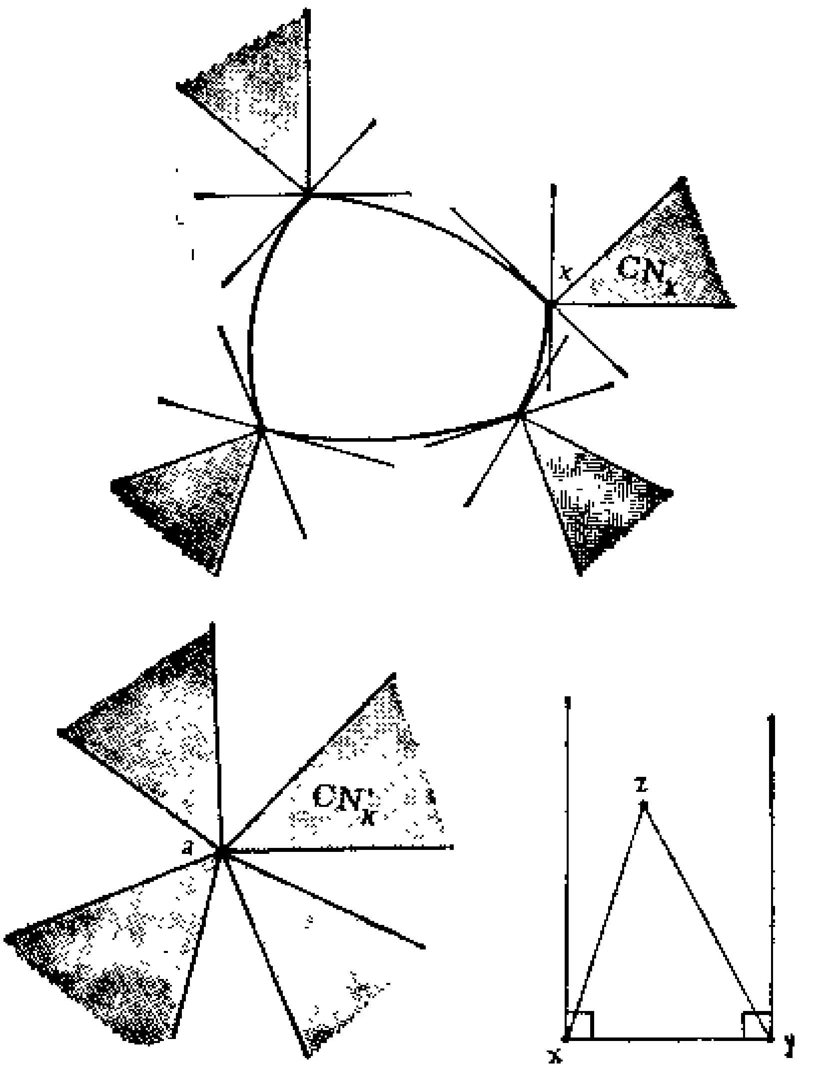


图 11.6.2.

11.6.3 关于顶点有一个更细致的定理，参看 [VE] 第 136 页。

11.6.4 **定义。** 设 A 是一凸集，$x \in \operatorname{Fr} A$。若在点 x 处存在一个支撑超平面 H，使得 $H \cap A = \{x\}$，则称 x 是暴露点。若由 $y, z \in A$，

$x = \frac{y+z}{2}$ 总有 $y = z$，则称点 x 为端点。如果一个凸集的所有的边界点均是暴露点，则称此凸集为严格的凸集。

11.6.5 附注

11.6.5.1 顶点必是端点，但反之不然（图 11.6.5.1）；然而在 12.1.9 中将可看到，对于多面体两者是一致的。

11.6.5.2 暴露点必是端点，但反之不然(图 11.6.5.2)。

11.6.5.3 全体端点所成的集合未必是闭的：图 11.6.5.3。然而，$d = 2$ 时，结论为真，参见练习 11.9.8。

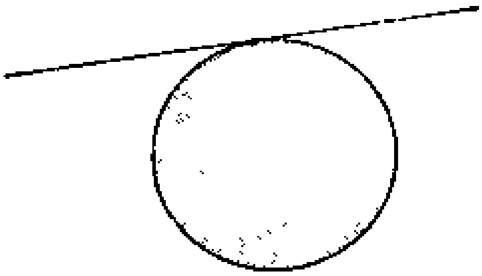


图 11.6.5.1.



图 11.6.5.2.

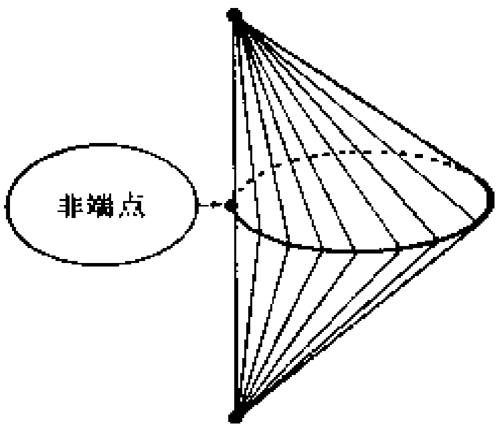


图 11.6.5.3.

11.6.5.4 设 $x \in \mathrm{Fr}\,A$，且 x 是端点。则 x 是一端点等价于 $A \backslash x$ 仍是凸集：参见图 11.1.1.7 和 11.1.1.8。

11.6.5.5 端点的一个应用为 11.8.10.9。

11.6.6 例子

11.6.6.1 一个紧区间的端点就是它作为区间的端点。

11.6.6.2 在测度论里，端点起重要的作用（其实，在那里涉及的是无限维空间，参见 [DE 4]，第 147 页问题 8。

11.6.6.3 在应用数学里也会遇到端点。例如，双随机矩阵全体构成一个凸集，此凸集的端点为置换矩阵；参见 11.9.7 和 [KE] 第 21 章或者 [R-V] 第 V 章应用部分。

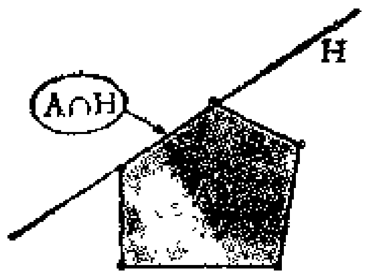


图 11.6.8.

11.6.7 现在我们可以回答从 11.1.8.5 开始期待已久的问题了，这就是：

11.6.8 定理 (Krein 和 Milman)。 一个紧凸集是其端点的凸包络。

用 Extrem(.) 表示一个凸集所有端点的集合。易见，对于 A 的任一支撑超平面 H，由定义 11.6.4 可推出 $\text{Extrem}(A\cap H)=(\text{Extrem}(A))\cap H$。下面对 X 的维数 d 用归纳法证明 11.6.8。当 $d=1$ 时，从 11.6.6.1 即可推出定理。现设定理对 $d-1$ 成立。根据 11.2.9，从 $\text{Fr}\,A\subset\mathscr{E}(\text{Extrem}(A))$ 可断言 $A=\mathscr{E}(\text{Extrem}(A))$。设 $x\in\text{Fr}\,A$，并且 H 是 A 在点 x 处的一个支撑超平面（参见 11.5.2）；则 $A\cap H$ 是 H 的一个凸集，于是，由归纳假设：

$$x\in H\cap A=\mathscr{E}(\text{Extrem}(A\cap H))=\mathscr{E}(\text{Extrem}(A)\cap H)$$
$$=\mathscr{E}(\text{Extrem}(A))\cap H\subset\mathscr{E}(\text{Extrem}(A)).$$

11.6.9 有关边界点的其它结果，可看 [VE]，第 138—139 页。

11.7 Helly 定理及其应用

下述的 Helly 定理几何性很强，它有好些相当了不起的应用。饶有兴味的是，我们可以注意到，这个 Helly 定理提出的日期相对来说是很近的：1921 年，而 Krasnosel'skii 定理则还要近：1946 年。

11.7.1 定理 (Helly)。 设 X 是一个 d 维仿射空间。$\mathscr{F}$ 是 X 的一个基数大于 $d+1$ 的凸集族。如果 $\mathscr{F}$ 满足下述两个条件：

(i) $\mathscr{F}$ 的任意 $d+1$ 个元素所成的子族，其交集是非空的；

(ii) $\mathscr{F}$ 的所有元素是紧的或者 $\mathscr{F}$ 是有限的，则整个族 $\mathscr{F}$ 其交集是非空的。

11.7.2 注

凸集的条件是必不可少的：参看图 11.7.2.1. 条件 (i) 中的 $d+1$ 是所有可能情况中最好的结果：参看图 11.7.2.2 和 11.7.2.3. 条件 (ii) 也是必要的：不然的话，可取 $\mathscr{F}=\{[n,\infty[;\ n\in\mathbf{N}\}$.

最后，我们注意到 11.7.1 是一个构造性的定理。

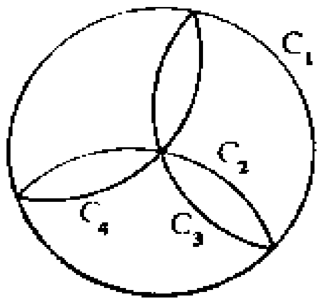


图 11.7.2.2.

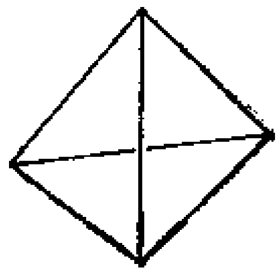


图 11.7.2.1.

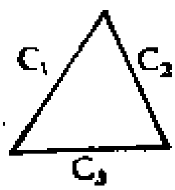


图 11.7.2.3.

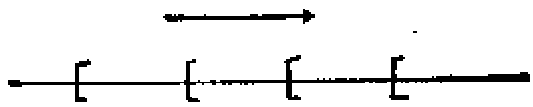


图 11.7.2.4.

11.7.3.1 第一种情形：$\mathscr{F}$ 是有限的，并且 $\mathscr{F}$ 的所有的元素是紧集。

通过初等集合论的论证，问题可以归结为对 $\#\mathscr{F}=d+2$ 情形的讨论。下面我们对 $d=\dim X$ 用归纳法证明。当 $d=0$ 时，定理是显然的。设 $\mathscr{F}=\{C_1,\cdots,C_{d+2}\}$ 并利用反证法：假定 $\bigcap_{i=1}^{d+2} C_i=\varnothing$；则必要时通过对 $\mathscr{F}$ 作重新编号，总可假定

$$A=C_1\cap\cdots\cap C_{d+1}\neq\varnothing,\ \text{而}\ A\cap C_{d+2}=\varnothing.$$

设超平面 H 严格分离 A 和 C_{d+2} (参见 11.4.6)，考虑 H 的 $d+1$ 个子集 $H\cap C_1,\cdots,H\cap C_{d+1}$；它们中的 $d-1$ 个总是满足 (i) 的，

这是因为 $C_1,\cdots,C_{d+1}$ 中任意 d 个将同 C_{d+2} 有非空的交集(根据对 $\mathscr{F}$ 的条件(i)),因而同集合 A 也有非空交集，于是利用凸性可知同 H 也是如此。根据归纳假设，就有 $H\cap C_1\cap\cdots\cap C_{d+1}\neq\emptyset$，这同 H 的选取矛盾。

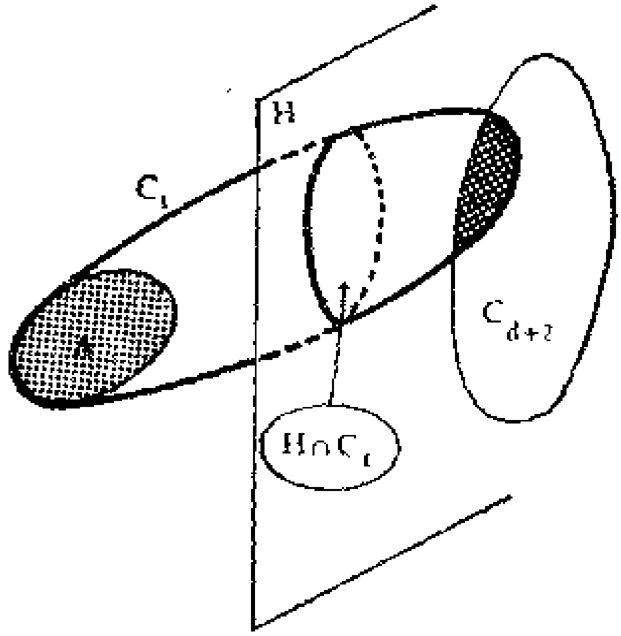


图 11.7.3.1.

11.7.3.2 第二种情形： $\mathscr{F}$ 不一定是有限的，但 $\mathscr{F}$ 的所有的元素是紧集. 根据 11.7.3.1 可知：$\mathscr{F}$ 的任意一个有限子族其交集非空；根据一般拓扑学的经典结论，由此可推出 $\mathscr{F}$ 本身的交集是非空的. 我们不妨回想一下其论证过程：用反证法，假设 $\forall x\in F_1$，$\exists F_x\in\mathscr{F}$ 使得 $x\notin F_x$，则 $\exists U_x\in O_x(X)$，使得 $U_x\cap F_x=\emptyset$. 然而，由紧性，可用有限个 $U_{x_1},\cdots,U_{x_n}$ 覆盖 F_1，与 $F_1\cap F_{x_1}\cap\cdots\cap F_{x_n}\neq\emptyset$ 矛盾。

11.7.3.3 第三种情形： $\mathscr{F}$ 中的元素不一定是紧集，但 $\mathscr{F}$ 是有限的。

如同 11.7.3.1 中开头所述，可归结为 $\#\mathscr{F}=d+2$ 的情况加以讨论。于是，设 $\mathscr{F}=\{C_1,\cdots,C_{d+2}\}$ 使其任意 $d+1$ 个元素构成的子族的交集是非空的。我们要构作紧集 $K_i\subset C_i\ (i=1,\cdots,d+2)$，使得任意 $d+1$ 个元素构成的子族其交集仍是非

空的；这样，从 11.7.3.1 即可推得定理成立。今构作 K_i 如下：依假设存在 $p_i \in \bigcap_{j \neq i} C_j \ (i = 2, \cdots, d+2)$；置 $K_1 = \mathscr{E}(p_2, \cdots, p_{d+2})$。这样 $K_1 \subset C_1$，并且族 $\{K_1, C_2, \cdots, C_{d+2}\}$ 仍满足 (i)，这是因为对于任意的 $i = 2, \cdots, d+2$，$K_1 \cap \bigcap_{\substack{j \geq 2 \\ j \neq i}} C_j \ni p_i$。然后，按同样的方式构作 $K_2, \cdots$。

11.7.4 注

11.7.4.1 对第三种情形，Radon 有一种证明，是以线性代数作为基础的：参见 11.9.11。

11.7.4.2 在 Helly 定理和 Carathéodory 定理之间（参见 11.1.8.6）存在着密切的联系：参见 [EN] 第 39 页和 [VE] 第 72—73 页上 Helly 定理的第三种证明。

11.7.5 推论. 设在一个仿射平面 X 内，族 $\mathscr{F}$ 由有限个平行线段组成，并且每三个线段具有一条共同的割线，则整个族 $\mathscr{F}$ 具有一条共同的割线。

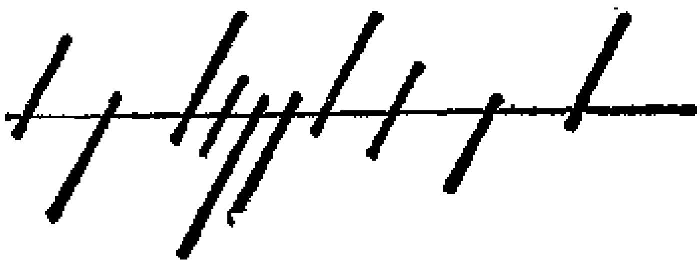


图 11.7.5.

下面我们排除每两条线段位于同一条直线上的情形：那时，$\mathscr{F}$ 中所有的线段将位于同一条直线上，结论成立。如果不是这样的情况，在 X 内选取坐标系，使得 Oy 轴是这些线段的公共方向；对于一条线段 $S \in \mathscr{F}$，置 $S' = \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$：直线 $y = \alpha x + \beta$ 与 S 相交$\}$。下面验证 S' 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个凸集。根据假设条件每三个 S' 具有一个公共点，因而它们有一个非空的交集，从而 $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ 决定了一条直线 $y = \alpha x + \beta$，它同 $\mathscr{F}$ 中每一个元素 S 相交。

下述推论表明，d 维仿射空间中的紧凸集至多对 d 缺乏对称性。当 $d=1$ 时，任意一个线段是关于它的中心对称的。有关其它的类似结果，例如可看练习 12.12.21 或 [VE] 第 190 页命题 12.5. 尤其是令人惊叹的 Dvoretsky 结论断言：对于适当的维数，一个凸集总具有几乎是球面的截面（见 Some results on convex bodies and Banach spaces, Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces, p.123—160, Jerusalem 1961).

11.7.6 推论. 对于 d 维仿射空间 X 的任意一个紧凸集 A，至少存在一点 $z\in A$，使得 A 中过 z 的任意一条弦 $[u,v]$（参见 11.2.9 和 2.4.6）满足

$$\frac{1}{d}\leqslant\frac{\overrightarrow{zu}}{\overrightarrow{vz}}\leqslant d.$$

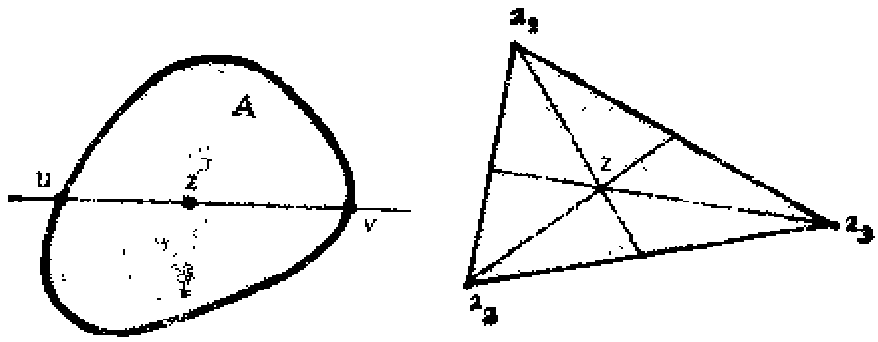


图 11.7.6.1.

首先，我们注意到 d 是所有可能的情形下最好的界，以任意一个单形为例即可说明这一点，对于这样的单形，读者可验证存在唯一的这样的 z，即此单形的重心.

为了证明 11.7.6，对于任意的 $x\in A$，引入（与 11.1.3 比较）：

$$A_x=\frac{1}{d+1}\cdot x+\frac{d}{d+1}\cdot A,$$

它就是位似 $H_{x,d/d+1}(A)$（参见 2.3.3.8）．这些 A_x, $x\in A$ 满足 Helly 定理的假设条件，且此时每一个集合都是紧的：事实上，设

$\{x_i\}_{i=1,\cdots,d+1}\subset A$，并且其重心为 $y=\frac{1}{d+1}\sum_i x_i$。

对于任意的 $i=1,\cdots,d+1$，因为 A 是凸集，故有

$$y=\frac{1}{d+1}\cdot x_i+\frac{d}{d+1}\left[\sum_{j\neq i}\left(\frac{1}{d}x_j\right)\right]\in A_{x_i}$$

(参见 11.1.8.4)。因而设 $z\in\bigcap_{x\in A}A_x$，并且 $[u,v]$ 是过 z 的一条弦；由 $z\in A_u$ 即可推出 $z\in H_{u,d/d+1}([u,v])$。于是 $\frac{\overrightarrow{uz}}{\overrightarrow{uv}}\leqslant\frac{d}{d+1}$，由此推出 $\frac{\overrightarrow{zu}}{\overrightarrow{vz}}\leqslant d$。交换 u 和 v，即推得结论。

下面推论表明：例如，对于平面的情况，设对一个博物馆里的任意三幅画，一位参观者总能找到一个地方，在那里能看到这三幅画，则他就能找到一个地方，在那里同时能看到这博物馆内所有的画(可能他得有很好的目力，或者有一个远距离镜头，不过他可以坐在那儿了)。当然，此推论是判定一个集合是星形集的判定准则。

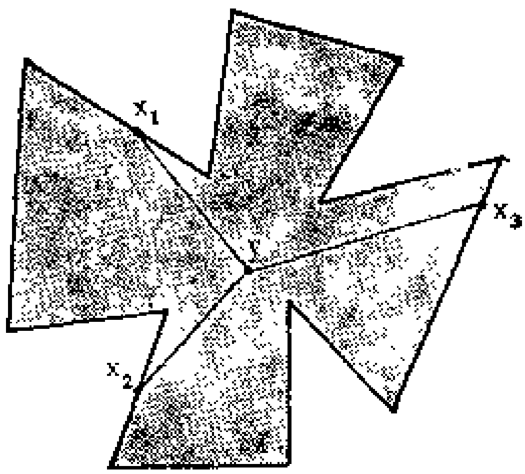


图 11.7.6.2.

11.7.7 推论 (Krasnosel'skii). 设 A 是 d 维欧几里得仿射空间 X 中的一个紧集。又假设对于任意的 $\{x_i\}_{i=1,\cdots,d+1}\subset A$，存在 $y\in X$，使得 $[x_i,y]\subset A$ 对于任意的 $i=1,\cdots,d+1$ 成立。则 A 是一个星形集。

基本思想是，对每点 $x\in X$ 引入以 x 为中心、含在 A 内的最大星形集，即

$$V_x=\{y\in A;\ [x,y]\subset A\}.$$

这些 V_x 是紧的，特别，它们的凸包络 $\mathscr{E}(V_x)$ 也是紧的(参见 11.1.8.7)。推论中的假设条件十分明确：这些 V_x，更不必说

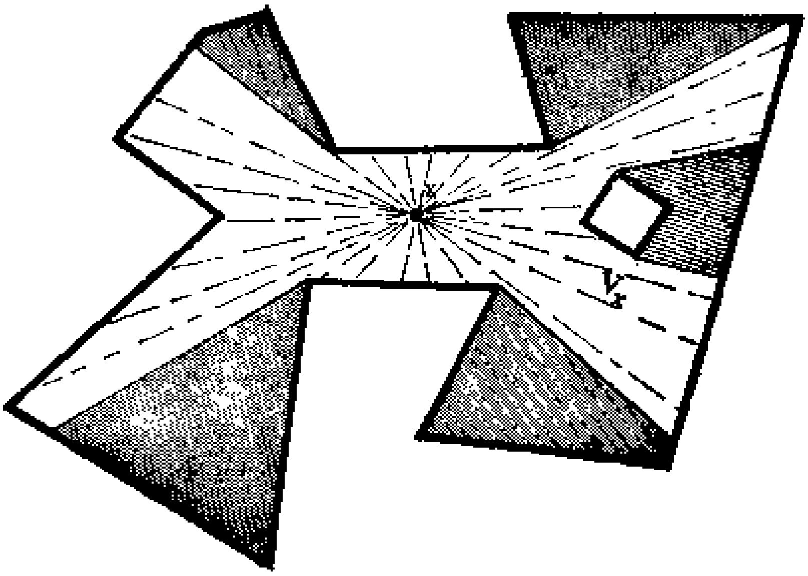


图 11.7.7.1.

$\mathscr{E}(V_x)$ 都是每 $d+1$ 个必有非空交集的。于是(参见 11.7.1)，存在 $y \in \bigcap_{x\in A} \mathscr{E}(V_x)$。我们证明 A 是点 x 处的一个星形集。当然，困难在于事先并不知道 $y \in \bigcap_{x\in A} V_x$ (而且，一般而言 V_x 不是凸的，故不能对它们应用 Helly 定理)。

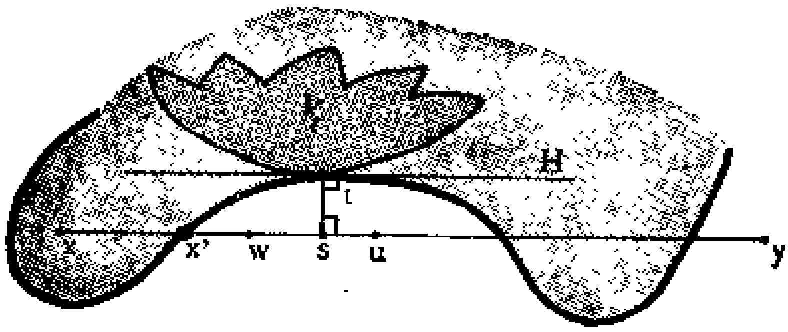


图 11.7.7.2.

用反证法证明：假设 $x \in A$，且使 $[x, y] \not\subset A$。在 X 上引入欧几里得结构。设 x' 是闭区间 $[x, y]$ 上从 x 引出的使得 $[x, x'] \subset A$ 成立的最后的那一点。任取 $[x, y] \backslash A$ 上一点 u，根据连续性，存在 $w \in]x', u]$ 使得 $d(w, x') < d(u, A)$。现在，设 $s \in [u, w]$ 和 $t \in A$，使得 $d(s, t) = d([u, w], A)$。由上述作法可知 $s \neq u$;

应用两次 11.1.7.2；一次是在 s 对于 A，另一次是在 t 对于 $[u, w]$，可见 $(\overrightarrow{st}|\overrightarrow{sy})\leqslant 0$ 以及 V_t（因而 $\mathscr{E}(V_t)$）整个位在由超平面 H 决定的区域内，这里，超平面 H 过点 t，与 $\overrightarrow{st}$ 正交，且不含点 s'。而由这两个条件就推知 $y\notin\mathscr{E}(V_t)$。

11.7.8 Helly 定理的其它应用，可看 [VE] 第 6 部分，[EN] 第 2 章和 [D-G-K]。

11.8 凸 函 数

11.8.1 我们记得，设 $f: I\to\mathbf{R}$ 是一个函数，这里 I 是 $\mathbf{R}$ 的一个区间，如果 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall x, y\in I$ 恒有 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$，则称 f 是一个凸函数。

更一般地，我们给出：

11.8.2 定义. 设 $A\subset X$ 是仿射空间 X 的一个凸集；映射 $f: A\to\mathbf{R}$. 如果 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall x, y\in A$ 恒有 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$，则称 f 是凸函数。

这样的条件仅当 A 是凸集时才有意义。我们还可以给出一个等价的定义，但写成命题的形式如下：

11.8.3 命题. 设 $f: A\to\mathbf{R}$，这里 A 是一个凸集.则"f 是凸函数"等价于"f 的图域是 $X\times\mathbf{R}$ 的一个凸集"，这里 f 的图域是指

$$\operatorname{Epigr}(f)=\{(x,t)\in X\times\mathbf{R}:\ x\in A \text{ 和 } t\geqslant f(x)\}.$$

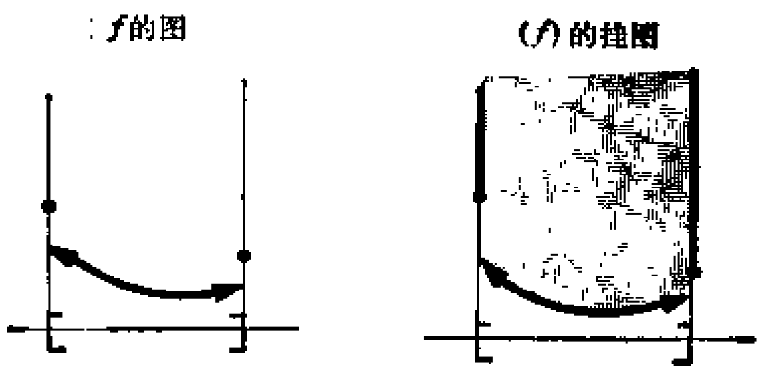


图 11.8.3.

如果 f 是凸的，容易用归纳法证明：

11.8.4 $\forall\lambda_i$: $\lambda_i \geqslant 0\ \forall i$ 和 $\sum_i \lambda_i = 1$, $\forall(x_i)\subset A$, 有

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_i \lambda_i f(x_i).$$

11.8.5 定义. 设有函数 f: $A\to\mathbf{R}$, 这里 A 是一个凸集. 如果 $\forall\lambda\in]0,1[$, $\forall x, y\in A$ 和 $x \neq y$ 恒有 $f(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$, 则称 f 是严格凸函数.

11.8.6 定义. 设有函数 f: $A\to\mathbf{R}$. 如果 $-f$ 是凸的，则称 f 是凹函数；即若对任意的 $\lambda\in[0,1]$, $x, y\in A$ 有 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$, 则称 f 是凹函数.

11.8.7 例子

11.8.7.1 图 11.8.6 表明，一个凸函数未必是连续的. 更一般地，一个紧集上的凸函数一般而言甚至不是有界的：取 $A = B(0,1)\subset\mathbf{R}^2$, $f|_{\mathring{A}} = 0$ 而在 $S(0,1) = A\backslash\mathring{A}$ 上，f 取为任意的正值函数。关于凸函数的连续性可参看 11.8.10.4.

11.8.7.2 一个仿射形式 f: $X\to\mathbf{R}$ (参见 2.4.8.3) 是凸的，但是根据 3.5.1, 在 11.8.4 内总能取到等号，故 f 绝不是严格凸的.

11.8.7.3 在 $\mathbf{R}$ 上定义的 $x\longmapsto x^2$, $x\longmapsto x$ 是严格凸的.

11.8.7.4 如果 $\forall i$, f_i: $A\to\mathbf{R}$ 是凸的，所有的 c_i 均大于或等于零，则 $\sum_i c_i f_i$ 仍是凸的.

11.8.7.5 如果 $\forall i$, f_i: $A\to\mathbf{R}$ 是凸的，则它们的上包络是凸的：因为，上包络的图域为 f_i 的图域之交，故应用 11.8.3 即可.

11.8.7.6 如果 x, y, z, t 是欧几里得仿射空间中的四个点，则函数

$$[0,1]\ni\lambda\longmapsto d(\lambda x+(1-\lambda)y, \lambda z+(1-\lambda)t)\in\mathbf{R}$$

是凸的. 事实上，$d(\lambda x+(1-\lambda)y, \lambda z+(1-\lambda)t) = \|\lambda\overrightarrow{xz}+(1-\lambda)\overrightarrow{yt}\|$, 于是从 9.2.2 的证明可推得所求的不等式.

现在给出凸函数的两个比较不那么平常的例子；这两个例子

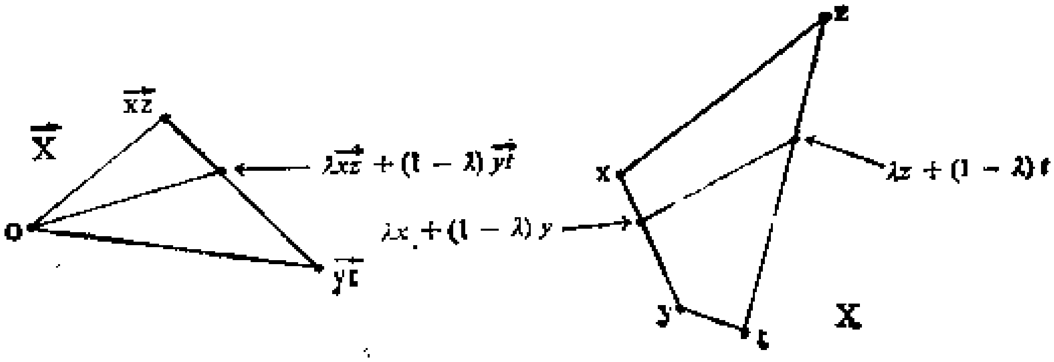


图 11.8.7.

对于下面的内容是很重要的：参看 12.11.3 和 15.5.9。

11.8.8 Brunn-Minkowski 定理

11.8.8.1 定理 (Brunn-Minkowski). 设 A 和 B 是仿射空间 X 中的两个 d 维紧集，并且 $\mathfrak{L}$ 是 X 上的 Lebesgue 测度，则函数

$$[0,1]\ni\lambda\longmapsto\mathfrak{L}(\lambda A+(1-\lambda)B)^{1/d}\in\mathbf{R}$$

是凹的(有关 $\lambda A+(1-\lambda)B$ 的定义参见 11.1.3)。

我们赋予 X 一个欧几里得结构，$\mathfrak{L}$ 是该结构的 Lebesgue 测度，并选用一个正交标架。把棱边平行于所考虑的标架的开的平行六面体集合记作 $\mathscr{F}$。

11.8.8.2 第一种情形. A 和 B 都属于 $\mathscr{F}$. 用 a_i 和 b_i $(i=1,\cdots,d)$ 表示 A, B 的棱；则 $\lambda A+\mu B\in\mathscr{F}$，并以 $\lambda a_i+\mu b_i$ 作为它的棱 $(\forall\lambda,\mu\geqslant 0)$. 从而有 $\mathfrak{L}(A)=\prod_i a_i$, $\mathfrak{L}(B)=\prod_i b_i$, $\mathfrak{L}(\lambda A+\mu B)=\prod_i(\lambda a_i+\mu b_i)$. 置

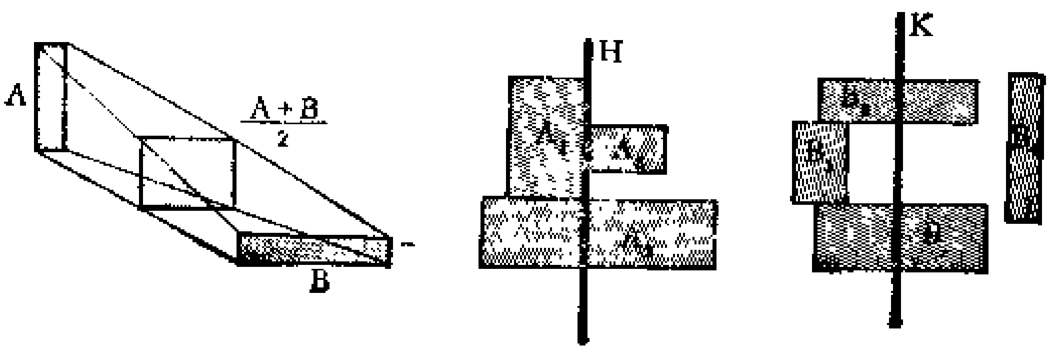


图 11.8.8.

$$u_i = \frac{a_i}{\lambda a_i + \mu b_i}, \quad v_i = \frac{b_i}{\lambda a_i + \mu b_i},$$

使得 $\lambda\mu_i + \mu v_i = 1$。根据 11.8.11.6，我们有

$$\frac{\lambda \mathfrak{L}(A)^{1/d} + \mu \mathfrak{L}(B)^{1/d}}{\mathfrak{L}(\lambda A + \mu B)^{1/d}} = \lambda \prod_i u_i^{1/d} + \mu \prod_i v_i^{1/d}$$

$$\leqslant \frac{\lambda}{d} \sum_i u_i + \frac{\lambda}{d} \sum_i v_i$$

$$= \frac{\sum_i (\lambda u_i + \mu v_i)}{d} = 1.$$

11.8.8.3 第二种情形. 设 $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, $B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$，这里 $A_i, B_j \in \mathscr{F}\ \forall i, j$，并且 $A_i \cap A_{i'} = \varnothing$, $B_j \cap B_{j'} = \varnothing$, $\forall i \neq i', j \neq j'$. 这时对整数 $m + n$ 用归纳法来进行证明；例如，我们假设 $m > 1$，于是，存在一个超平面 H，它平行于一个坐标超平面，并且，至少严格分离 A_i 中的两个，于是可写 $A = A^+ \cup A^-$，其中 A^+ 和 A^- 是和 A 同类型的，但前者含 m^+ 个，后者含 m^- 个，使得 $m^+ < m$ 和 $m^- < m$。根据连续性，我们可以看出，存在一个与 H 平行的超平面 K，它把 B 割为 B^+ 和 B^-，且使得 $\dfrac{\mathfrak{L}(A^+)}{\mathfrak{L}(A^-)} = \dfrac{\mathfrak{L}(B^+)}{\mathfrak{L}(B^-)}$；我们有 $\mathfrak{L}(A) = \mathfrak{L}(A^+) + \mathfrak{L}(A^-)$, $\mathfrak{L}(B) = \mathfrak{L}(B^+) + \mathfrak{L}(B^-)$；此外，$B^+$ 和 B^- 是和 B 同类型的，且使 $n^+ \leqslant n$, $n^- \leqslant n$。因而，对 $\lambda A^+ + \mu B^+$ 和 $\lambda A^- + \mu B^-$ 应用归纳法假设条件，就有：

$$\mathfrak{L}(\lambda A + \mu B) = \mathfrak{L}(\lambda A^+ + \mu B^+) + \mathfrak{L}(\lambda A^- + \mu B^-)$$

$$\geqslant (\lambda \mathfrak{L}(A^+)^{1/d} + \mu \mathfrak{L}(B^+)^{1/d})^d$$

$$+ (\lambda \mathfrak{L}(A^-)^{1/d} + \mu \mathfrak{L}(B^-)^{1/d})^d$$

$$= (\lambda \mathfrak{L}(A)^{1/d} + \mu \mathfrak{L}(B)^{1/d})^d.$$

11.8.8.4 第三种情形. 现在 A 和 B 是任意的紧集；不过，根据 Lebesgue 测度的标准理论，我们可用 11.8.8.3 的类型的集 A_n, B_n 逼近 A, B，使得 $|\mathfrak{L}(A) - \mathfrak{L}(A_n)| < \varepsilon$, $|\mathfrak{L}(B) - \mathfrak{L}(B_n)| < \varepsilon$，由此得到结论。

11.8.8.5 推论. 对于任意的紧集 A, B, 恒有

$$\mathfrak{L}(A+B)^{1/d} \geqslant \mathfrak{L}(A)^{1/d} + \mathfrak{L}(B)^{1/d}.$$

11.8.8.6 注. 我们可以证明：所研究的函数是严格凹的充分必要条件为集合 A 和 B 不能通过扩张互化；但证明要难得多，请参看 [EN] 第 97 页，或 [HR] 第 187 页.

11.8.9 Loewner-Behrend 函数

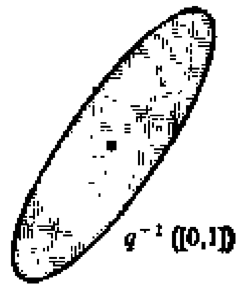


图 11.8.9.

11.8.9.1 沿用 8.2.5.2 中的记号，E 是 d 维实向量空间，$Q(E)$ 是 E 上欧几里得结构全体所成的空间，它是向量空间 $\mathscr{P}_2^{\bullet}(E)$ 中一个开的凸集。今在 E 上取定一个 Lebesgue 测度 $\mathfrak{L}$。对于每一个 $q\in Q(E)$，配以椭球面 $q^{-1}(1)$（参见 15.3.3.3），其凸包络为实心椭球 $\mathscr{E}(q)=q^{-1}([0,1])$；我们打算计算它的体积 $\mathfrak{L}(\mathscr{E}(q))$（参见 9.12.4）.

11.8.9.2 设 A, A' 分别是 q 关于 E 中基底 $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ 的矩阵（参见 13.1.3.6），则 $A'={}^tSAS$，这里 S 是 $f\in \mathrm{Isom}(E)\,|\,f(\mathscr{B})=\mathscr{B}'$ 关于 $\mathscr{B}$ 的矩阵. 特别，若 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B}'$ 是 E 关于 $\mathfrak{L}$ 的单位基底，也就是相伴的同构 $\mathbf{R}^d\to E$ 是 2.7.4.2 类型的，则尤其有 $\det S=1$ 和 $\det A=\det A'$。于是，对于 $\mathfrak{L}$ 和 $q\in Q(E)$，我们可以定义其行列式：

11.8.9.3 $\det_{\mathfrak{L}} q=\det A$,

这里，A 是 q 在任何一个单位基底 $\mathscr{B}$ 下的矩阵。这样一来，我们就有

11.8.9.4
$$\boxed{\mathfrak{L}(\mathscr{E}(q))=\beta(d)(\det_{\mathfrak{L}} q)^{-1/2}}$$

这里 $\beta(d)$ 的定义见 9.12.4.7.

事实上，我们赋予 E 一个以 $\mathfrak{L}$ 为典范测度的辅助欧几里得结构（参见 9.12），并设 $f\in \mathrm{Isom}(E)$，使得 $f(B(0,1))=\mathscr{E}(q)$，亦即（参见 13.1.3.9）$f^*q=\|\cdot\|^2$，其中 $\|\cdot\|$ 是欧几里得结构的范数，特别（参见 13.1.3.10），既然 $\|\cdot\|^2$ 的矩阵是 I，故 A 矩阵满足

$f = {}^tUAU$，这里 U 是 f 在任一标准正交基底下的矩阵。特别有 $\det A\cdot|\det f|^2=1$。根据 2.7.4.3，

$$\mathfrak{L}(\mathscr{E}(q)) = |\det f|\cdot\mathfrak{L}(B(0,1)) = |\det f|\cdot\beta(d)$$
$$= \beta(d)(\det{}_{\mathfrak{L}} q)^{-1/2}.$$

在 11.8.10.7 中给出 Loewner-Behrend 定理的证明时，要用到：

11.8.9.5 命题. 函数 $Q(E)\ni q\to\mathfrak{L}(\mathscr{E}(q))\in\boldsymbol{R}$ 是严格凸的。

设 $q, q'\in Q(E)$；根据 13.5.5，存在一个同时对角线化的基底，并不妨假设它们都是 $\mathfrak{L}$ 单位化的，使

$$q=\sum_i a_i x_i^2,\quad q'=\sum_i a_i' x_i^2.$$

相对于这个基底，q 和 q' 的行列式顺次为

$$\det q=\prod_i a_i,\ \det q'=\prod_i a_i',$$ 而且当 $\lambda,\lambda'\geqslant 0$，$\lambda+\lambda'=1$ 时，我们有

$$\det(\lambda q+\lambda' q')=\prod_i(\lambda a_i+\lambda' a_i').$$

多次应用 11.8.11.4 可得：

$$\begin{aligned}(\det(\lambda q+\lambda' q'))^{-1/2} &= \prod_i(\lambda a_i+\lambda' a_i')^{-1/2}\\ &\leqslant \prod_i(a_i^{\lambda} a_i'^{\lambda'})^{-1/2}\\ &= \left[\left(\prod_i a_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\lambda}\left[\left(\prod_i a_i'\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\lambda'}\\ &\leqslant \lambda(\det q)^{-1/2}+\lambda'(\det q')^{-1/2}.\end{aligned}$$

仅当对于每一对 (a_i, a_i') 等号成立时，上式等号才成立；因而，仅当 $\forall i\ a_i=a_i'$，即 $q=q'$ 时等号才成立。

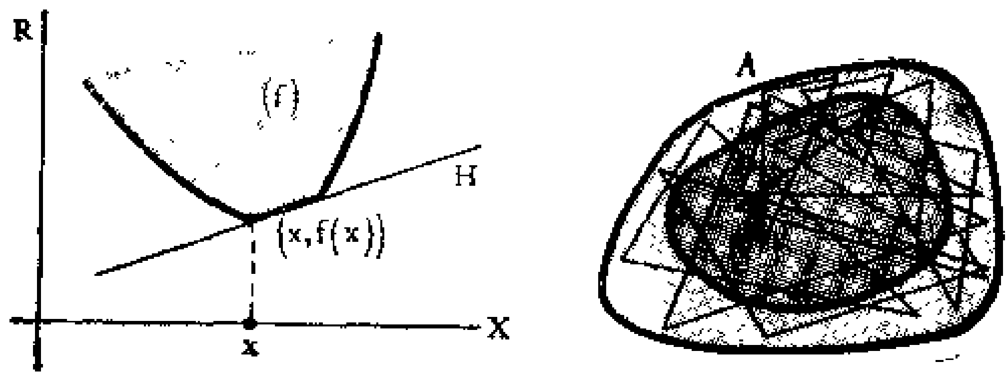
11.8.10 凸函数的一些性质. 我们在 11.8.7.1 中已经看到，一个凸函数甚至在一个紧集上也未必是连续或有界的；然而，我们马上可以看到，可能引起麻烦的只是边界上和上界；情况正如 11.8.7.1 中的例所假设的那样。

11.8.10.1 命题. 凸函数 $f: A\to\mathbf{R}$ 在 A 的相对内部（参见

11.2.8）的任意一个紧集上是界于上的；f 在 A 的任一有界集上是界于下的。

按照惯例，仅考虑 $\mathring{A} \neq \emptyset$ 的情形。设任意一点 $x \in \mathring{A}$，并且 H 是 Epigr (f) 在点 $(x, f(x))$ 处的一个支撑超平面（参见 11.8.3 和 11.5.2）。又设 $g: X \to \mathbf{R}$ 是一个仿射形式，满足 $H = g^{-1}(0)$。根据作法，有 $f \geqslant g$，而仿射形式在任意一个有界集上是有界的。

设 $K \subset \mathring{A}$ 是一个紧集。对于任意的 $x \in K$，存在 X 的一个单形 S_x，使得 $S_x \subset \mathring{A}$ 和 $x \in \overset{\circ}{\widehat{\mathscr{E}(S_x)}}$。利用紧性，可用有限多个这样的单形覆盖 K；根据 11.8.4 可知 $f(x)$ 在任意点 $x \in K$ 处的值是被 f 在这些单形的有限个数顶点处的值所界于上的。



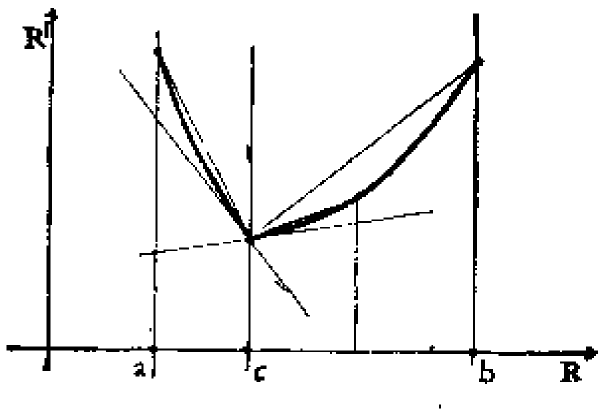


图 11.8.10.1.

11.8.10.2 引理. 设 $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ 是凸的，$c \in]a, b[$；则

(i) 函数 $[a, b] \backslash c: t \longmapsto \dfrac{f(t) - f(c)}{t - c}$ 是递增的。

(ii) f 在 c 点具有右导数 $f'_d(c)$ 和左导数 $f'_g(c)$，并且 $f'_g(c) \leqslant f'_d(c)$；特别 f 在 c 点是连续的.

(iii) 若 f 在 $]a, b[$ 上可导,则它的导函数是递增的;若 $f''(c)$ 存在,则 $f''(c) > 0$.

由定义可推出递增性,参看图形. 当 $t>c$ 时，$t \longmapsto \frac{f(t)-f(c)}{t-c}$ 是递增的,并以 $\frac{f(a)-f(c)}{a-c}$ 作为它的下界，于是

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)-f(c)}{t-c} = f'_d(c)$$

是存在的. 同样，$f'_g(c)$ 也存在，且有 $f'_g(c) \leqslant f'_d(c)$. 至于 f'，如果它存在,因为 $\forall c, d \in]a, b[$，$f'(c) \leqslant \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \leqslant f'(d)$,所以它是递增的. 引理中最后一个断言是熟知的.

11.8.10.3 附注. 从引理的证明容易看出，

$$\{c \in]a, b[: f'_g(c) = f'_d(c)\}$$

是可数集. 关于凸函数更细致的性质以及无限维的情形，可看 [R-V] 的第 IV 章.

从引理可得，如果 $f: A \to \mathbf{R}$，$A \subset X$，X 是任意维的，则 f 在点 $a \in \mathring{A}$ 处自 A 引出的每一条半直线上具有方向导数. 现在，我们将应用这个想法.

11.8.10.4 命题. 设 $f: A \to \mathbf{R}$ 是凸的，则 f 在 A 相对内部的任意一点是连续的.

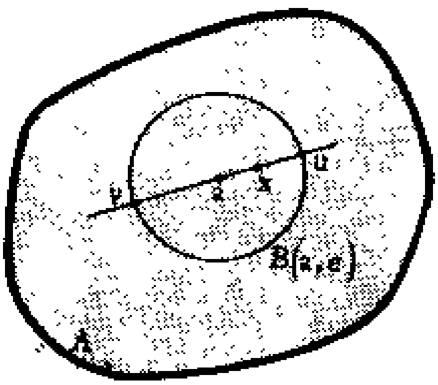


图 11.8.10.4.

实向量空间，赋有一个 Lebesgue 测度，若K是E的一个具有非空内部的紧集，则存在唯一的一个包含K且体积极小的椭球体。

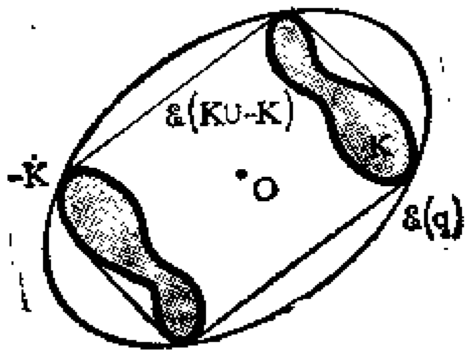


图 11.8.10.7.

根据 11.8.10.5, 11.8.9.5 和 $q \longmapsto \mathcal{L}(\mathscr{E}(q))$ 连续这一事实，只要证明在 $Q(E)$ 的一个适当的凸紧集上能找到我们的极小值就可以了。因为K是有界的，故至少存在一个含K的实心椭球面 $\mathscr{E}(q_0)$；引入

$$A=\{q\in Q(E):\ \mathscr{E}(q)\geqslant K \text{ 以及 } \det_{\epsilon} q\geqslant \det_{\epsilon} q_0\}.$$

于是，只要证明A是$Q(E)$的一个凸紧集。由于条件 $\det_{\epsilon} q\geqslant \det_{\epsilon} q_0$，根据 11.8.9.5 可知它是一个凸集。包含$K$的这一条件也是成立的：

$$\mathscr{E}(q)=\{x\in X:\ q(x)\leqslant 1\},\ \mathscr{E}(q')=\{x\in X:\ q'(x)\leqslant 1\}.$$

因而如果 $\forall x\in K,\ q(x),\ q'(x)\leqslant 1$，就可推出

$$(\lambda q+(1-\lambda)q')(x)=\lambda q(x)+(1-\lambda)q'(x)\leqslant 1.$$

从对于连续函数用广义不等式所给出的定义可知，集合A在 $\mathscr{P}_2^{\bullet}(E)$ 中是一个闭集，但是，我们得当心，因为 $Q(E)$ 是 $\mathscr{P}_2^{\bullet}(E)$ 的一个开集；然而它的边界是由退化的二次型构成的，于是 $\det_{\epsilon}\cdot=0$，从而A确实是一个闭集。

最后证明A是有界的。首先注意到 $\mathscr{E}(q)\supseteq K$，由此可导出 $\mathscr{E}(q)\supseteq\mathscr{E}(K\cup(-K))$，这里$-K$是$K$关于原点的对称集。还有，因为 $\overset{\circ}{K}\neq\emptyset$，所以 $\overset{\circ}{\widehat{\mathscr{E}(K\cup(-K))}}\neq\emptyset$。在$E$上安装一个欧几里得结构，并设 $\varepsilon>0$，使得 $B(0,\varepsilon)\subset\mathscr{E}(K\cup(-K))$。如果我们

要有 $\mathscr{E}(q)\supset B(0,\varepsilon)$，$q\in Q(E)$ 关于所考虑的欧几里得结构的特征值 λ_i 就应该满足：$\forall i$，$\lambda_i\leqslant 1/\varepsilon$；这正说明了 A 是有界的。

在 15.5.9 中我们将要用到 11.8.10.7，但是，我们已经指出过，它提供了 8.2.5 中介绍过的第三种证明方法（不用到积分理论的证明，因为椭球体的体积其实就是平常的行列式！）。

11.8.10.8 推论. 设 G 是 $\mathrm{GL}(E)$ 的一个紧子群；则存在 $q\in Q(E)$，在 G 下不变。

事实上，设 H 是 E 的任意一个内部非空的紧集，$K=G(H)$ 是在 G 作用下 H 的轨道，并设 $\mathscr{E}(q)$ 是包含 K 且具有极小体积的椭球。这一 $\mathscr{E}(q)$ 在任一 $g\in G$ 下不变；事实上，对于任意的 $g\in G$，按作法，$g(K)=K$，于是 $g(\mathscr{E}(q))\supset K$。最后，

$$\mathfrak{L}(g(\mathscr{E}(q)))=\mathfrak{L}(\mathscr{E}(q)),$$

这是因为 $\forall g$，$\det g=1$（否则，$\det(g^n)=(\det g)^n$，致使 G 不是紧的）；因为具有极小体积的椭球是唯一的，就有 $g(\mathscr{E}(q))=\mathscr{E}(q)$。从而二次型 q 使 $\forall g\in G$，$g^*q=q$。

回到凸函数的极值性质上来。

11.8.10.9 命题. 设 $f\colon A\to\mathbf{R}$ 是连续的凸函数；则 f 至少在 A 的一个端点处达到它的极大值，即

$$\sup_A f=\sup_{\mathrm{Extrem}(A)} f\ (\text{参见 } 11.6.8).$$

根据 11.1.8.6 和 11.6.8，任意一点 $a\in A$ 是端点的有限重心；于是，如果 $M=\sup_{\mathrm{Extrem}(A)} f$，则根据 11.8.4，$\forall a\in A$，恒有 $f(a)\leqslant M$。

11.8.10.10 附注. 命题 11.8.10.9 在极大值问题的具体应用中是十分重要的。例如，它在博奕论、对策论和线性程序设计方面都有应用：见 [KE] 第 86 页及以后几页；如果要找的极大值那个函数是凸的，只要知道函数在 Extrem (A) 上的值就够了。例如当 A 是一个多面体时，这些点只有有限多个（参见 12.1.9）。关于这方面的细节和例子，例如可参见 [KE] 和 [R-V] 的第 V 章。

11.8.11 凸集的判定准则，例子

11.8.11.1 命题. 设 $I\subset\mathbf{R}$ 是一个区间，$f\colon I\to\mathbf{R}$ 是二次可

导的。f 是一个凸函数的充分必要条件为 $\forall x \in I,\ f''(x) \geqslant 0$；为使 f 是一个严格的凸函数，只要 $\forall x \in I,\ f''(x) > 0$ 即可。

对 $a, b \in I$，令

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a);$$

必须证明在 $[a, b]$ 上 $g \leqslant 0$。然而 $f'' = g''$，于是 g' 是递增的。因为 g' 在 $[a, b]$ 上 α 处取零值(比如说 g 在 α 处取到极小值)，则在 α 的左边，$g' \leqslant 0$；而在 α 的右边 $g' \geqslant 0$，于是，g 从 $g(a) = 0$ 开始递减，然后又递增到 $g(b) = 0$，故而 $g \leqslant 0$。

	a	α	b
g	0	↘ ↗	0
g'	−	0	+
g''		+	

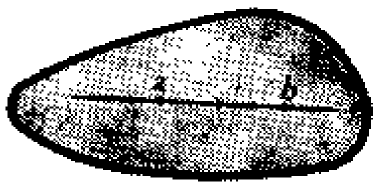


图 11.8.11.

11.8.11.2 推论. 设 $f: A \to \mathbf{R}$ 是 C^2 类的，这里 A 是 X 的一个开集。f 是凸函数的充分必要条件是二阶导数

$$f''(x): \vec{X} \times \vec{X} \to \mathbf{R}$$

对于每一 x 是一个正二次型，即 $\forall y \in \vec{X},\ f''(x)(y, y) \geqslant 0$。若 $\forall x \in A$ 和 $\forall y \in \vec{X}\backslash 0,\ f''(x)(y, y) > 0$，则 f 是严格凸的。

事实上，对于任意的 $a, b \in A$，只要应用 11.8.11.1 于函数 $t \to f(a + t\overrightarrow{ab})$ 就够了，该函数的二阶导数等于 $f''(a + t\overrightarrow{ab})(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ab})$。

11.8.11.3 例子. 函数 $-\log x$ 在 $\mathbf{R}_+^*$ 上是严格凸的，因为 $(-\log x)'' = \frac{1}{x^2}$，从而 $-\log(\lambda a + \lambda' a') \leqslant -\lambda \log a - \lambda' \log a'$ $(\lambda, \lambda' \geqslant 0, \lambda + \lambda' = 1)$。由于 log 是递增函数，就由此得出：

11.8.11.4 $\forall$ 使 $\lambda + \lambda' = 1$ 的 $\lambda, \lambda' \geqslant 0$，有

$$\lambda a + \lambda' a' \geqslant a^{\lambda} a'^{\lambda'};$$

更一般地有：

11.8.11.5 $\forall$ 使 $\sum_i \lambda_i = 1$ 的 $\lambda_i \geqslant 0$，有

$$\sum_i \lambda_i a_i \geqslant \prod_i a_i^{\lambda_i}.$$

特别，我们得到一个所谓"几何平均值"不等式：

11.8.11.6 $a_1 a_2 \cdots a_n \leqslant \left(\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^n$，

因为 $-\log x$ 是严格凸的，等号仅当所有的 a_i 都相等时才成立。当 $n = 2$ 时，这就是初等不等式 $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$。

11.8.11.7 例子。 对任一实数 $p > 1$，函数

$\mathbf{R}_+^*: x \longmapsto x^p \in \mathbf{R}$ 是严格凸的，这是因为 $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$。从而有：

11.8.11.8 $\forall a_i > 0$，$\forall$ 使 $\sum_i \lambda_i = 1$ 的 $\lambda_i \geqslant 0$，有

$$\left(\sum_i \lambda_i a_i\right)^p \leqslant \sum_i \lambda_i a_i^p.$$

由此推出 Hölder 不等式：

11.8.11.9

$$\sum_i x_i y_i \leqslant \left(\sum_i x_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_i y_i^q\right)^{1/q},$$

其中

$$p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ x_i \geqslant 0,\ y_i \geqslant 0.$$

当 $p = 2$ 时，此不等式即 8.1.3。但是，11.8.11.9 要困难得多。为了从 11.8.11.8 推出 Hölder 不等式，必须找到 λ_i，a_i，k，使得

$$\lambda_i a_i = x_i y_i,\ \lambda_i a_i^p = k x_i^p,\ \sum_i \lambda_i = 1.$$

上述方程式的解是 $\lambda_i = \left(\sum_i y_i^q\right)^{-1} y_i^q$，$a_i = \left(\sum_i y_i^q\right) x_i y_i^{1-q}$。取这些值并应用 11.8.11.8 即可推得 11.8.11.9。

11.8.11.10 从 11.8.11.9 最后可推出：对任意的 $p > 1$，

$\mathbf{R}^d$: $(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p}$ 是 $\mathbf{R}^d$ 上的一个范数. 我们必须证明

11.8.11.11

$$\left(\sum_i |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_i |y_i|^p\right)^{1/p}$$

(Minkowski 不等式); 此不等式可从下述计算得出，其中我们两次应用了 11.8.11.9:

$$\sum_i |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \leqslant \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_i |x_i + y_i|^p\right)^{p-1/p},$$

$$\sum_i |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leqslant \left(\sum_i |y_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_i |x_i + y_i|^p\right)^{p-1/p},$$

$$\begin{aligned}\sum_i |x_i + y_i|^p &\leqslant \left(\sum_i (|x_i| + |y_i|)(|x_i + y_i|^{p-1})\right) \\ &\leqslant \left(\sum_i |x_i + y_i|^p\right)^{p-1/p} \left[\left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p} \right. \\ &\qquad \left. + \left(\sum_i |y_i|^p\right)^{1/p}\right].\end{aligned}$$

11.8.11.12 **附注.** 不等式 11.8.11.9 和 11.8.11.11 今天已是在分析中最基本的不等式,从它们出发就可以定义 "L_p 空间".

对于其它的一些所谓"凸性"不等式, 例如可看 [DE 3] 第 46 页及以后几页, [R-V] 第 VI 章,以及其中提到的参考文献, 特别是古典的 [H-L-P] 和近代的 [B-B].

11.8.12 凸集与凸函数的对比

在 11.8.3 中, 我们已经看到了凸函数和凸集合两者之间的一个联系. 下面给出更为一般的两个联系, 但不作详尽讨论, 读者可参看 [EN] 第 54 页.

11.8.12.1 在这一节内, X 恒为欧几里得向量空间. 设 f: $X \to \mathbf{R}$ 是任意一个凸函数, 若 $\forall x$, $\forall \lambda > 0$ 有 $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, 则称 f 是 X 上的规范. 例如, X 上的范数是一个规范.

11.8.12.2 如果 f 是一个规范, 则 $C(f) = \{x \in X: f(x) \leqslant 1\}$ 是 X 的一个凸集. 反过来, 如果 C 是一个紧凸集, 且有 $0 \in \mathring{C}$, 则

$f_C(x) = \inf\{\lambda: \lambda > 0, x \in \lambda C\}$ 是一个规范，但它仅当 $C = -C$，即当 C 是对称时，才是一个范数。C 的边界是 $f_C^{-1}(1)$；我们称 f_C 是 C 的距离函数。

11.8.12.3 如果 C 是 X 的一个有界集，则 $h_C(x) = \sup\{(y|x): y \in X\}$ 也是一个规范，称为 X 的支撑函数。

11.8.12.4 从 11.1.5 和 11.4.8 可得出 h_C 和 f_C 之间的关系式。如果 C 是凸的紧集，且 $0 \in \mathring{C}$，则有 $f_{C^*} = h_C$，$h_{C^*} = f_C$。

11.8.12.5 一旦一个规范在单位球面 $S = S(0, 1)$ 上的限制已知时，则此规范就被确定了；但是在 $h = h_C$ 给定时找出 C（在 S 上），一般却不是显然可以做到的。如果 h 是可微的，我们可以说：C 是当 t 取遍 S 时超平面 $H_t = \{x \in X: (x|t) = 1\}$ 的包络，或者说 C 是曲面 $h^{-1}(1)$ 关于 S 的逆极交换的象。对于平面的情形，h 的已知条件就是我们称为曲线 Fr (C) 的 Euler 方程的式子。

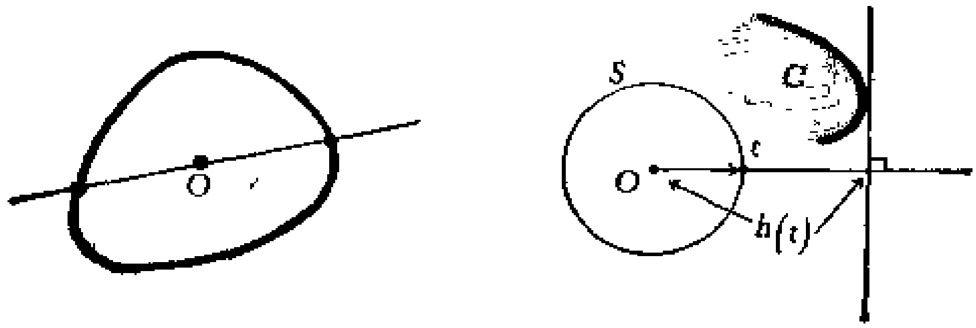


图 11.8.12.

11.8.12.6 支撑函数对于凸集的几何研究是一个有力的工具。参考文献例如可看 [EN] 第 54 页和整个第 V 章，[BU 1] 第 II 章第 6 节。也可看 11.9.14。

11.9 练　　习

11.9.1 证明 Minkowski 加法满足关系式：

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

$$(A \cup B) + C = (A + C) \cup (B + C),$$

$$(A \cap B)+C=(A+C) \cap(B+C).$$

而且对于位似变换有：$H_{a,\lambda}(A+B)=H_{a,\lambda}(A)+H_{a,\lambda}(B)$，

$$H_{a,\lambda}(A)+H_{a,\mu}(A) \supset H_{a,\lambda+\mu}(A);$$

何时等号成立？

11.9.2 对于有界集，是否恒有 $\operatorname{diam}(\mathscr{E}(A))=\operatorname{diam}(A)$？

11.9.3 设 X 是一个 d 维仿射空间，A 是 X 中至多具有 d 个连通分支的子集；则 $\mathscr{E}(A)$ 的任意一点是 A 的 d 个点的重心.

11.9.4 Hilbert 几何. 设 A 是 X 的一个内部非空的紧凸集.对于 $\mathring{A}$ 内不同两点 x, y，令 $d(x, y)=|\log[x, y, u, v]|$，这里 u, v 是直线 $\langle x, y\rangle$ 和 A 的边界的两个交点。证明：由上述的 d，加上 $\forall x \in \mathring{A}\ d(x, x)=0$ 来定义的 d: $\mathring{A} \times \mathring{A} \rightarrow \mathbf{R}$ 是 $\mathring{A}$ 上一个距离. 证明这个度量是优异的（参阅 9.9.4.4）。讨论三角形严格不等式和 A 的边界点性质之间的关系. 有关这一几何中的面积概念，可看 [B-Y] 第 167 页.

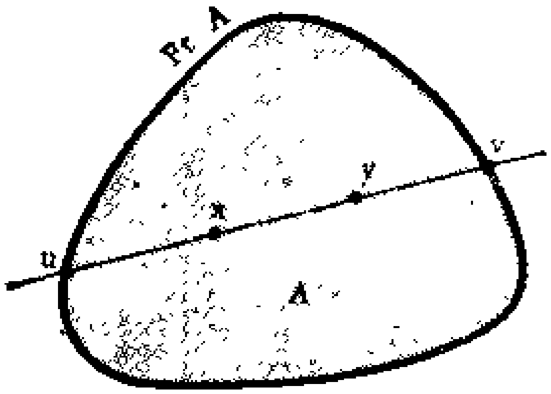


图 11.9.4.

11.9.5 设 X 是维数大于 1 的仿射空间，f: X 》是一个双射. 证明：若对于任意凸集 A，$f(A)$ 为凸集，则 f 是仿射映射.

11.9.6 设在 $\mathbf{R}^2$ 内，子集 $B=\{(x, y): x \geqslant 1$ 或 $x \leqslant-1\}$，而 $A=\mathbf{R}^2 \backslash B$ 是点 $(0,0)$ 处的一个星形集：见图 11.3.6.3. 又设 F: $A \rightarrow \mathbf{R}^2$ 是在 11.3.6.1 的证明中所构作的同胚；画出 $\mathbf{R}^2$ 中的圆周在 F 下的逆象.

11.9.7 设 E 是实系数 n 阶方阵所成的向量空间，并且 K 是由双随机矩阵全体构成的 E 的子集，即矩阵 (a_{ij}) 满足：$\forall i, j, a_{ij} \geqslant 0$；$\forall j, \sum_i a_{ij}=1$；对 $\forall i, \sum_j a_{ij}=1$. 证明 K 是 E 的一个紧多面

体．并且它的顶点恰好是置换矩阵，即矩阵中每一行或每一列里只有一个非零元素，且等于1．

11.9.8 对于二维空间中的一个凸集来说，全体端点构成一个闭集．

11.9.9 在$\mathbf{R}^3$内考虑一个用不等式组$x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$，$z \geqslant 0$，$z^2 \leqslant xy$定义的闭凸锥C．证明由方程组$x = 0$，$z = 1$所定义的直线同C是不相交的，但是不存在含D而不与C相交的平面．

11.9.10 **Kirchberger 定理**．设A和B是d维空间X的两个有限集．若对任何基数为$d+2$的子集Y，总能找到一个超平面严格分离$A \cap Y$和$B \cap Y$，则存在一个超平面严格分离A和B．

11.9.11 **Radon 代替 Helly**．设$A_i(i=1,\cdots,r)$是$\mathbf{R}^d$中凸集，其中$r > d+1$．并且这些A_i中任意$r-1$个具有非空交集．证明所有的A_i也有一个非空的交集：设$x_i \in \bigcap_{j \neq i} A_j (i = 1,\cdots,r)$，则存在不全为0的$\lambda_i$使得$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 0$和$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i = 0$，分$\lambda_i \geqslant 0$和$\lambda_i < 0$两种情形即可得出结论．

11.9.12 **最大宽度和最小宽度**．设C是一个紧凸集．当方向ξ取遍所有的直线方向时（参见11.5.6.3），C沿ξ方向的宽度的上确界称为C的最大宽度，记作$D(C)$；其下确界称为最小宽度，记作$d(C)$．证明$D(C) = \operatorname{diam}(C)$，其中$\operatorname{diam}(C)$是$C$的直径．

C的内半径，记作$r(C)$，就是包含在C内的球面的半径的上确界．若用d表示外围空间的维数，证明：

$$\text{若 } d \text{ 为奇数，则 } r(C) \geqslant \frac{d(C)}{2\sqrt{d}};$$

$$\text{若 } d \text{ 为偶数，则 } r(C) \geqslant \frac{\sqrt{d+2}}{2(d+1)} \cdot d(C).$$

如有需要，可参看［EN］第112页—114页．这些不等式是否是所可能的最好估计？

11.9.13 设A是一个开凸集，$f: A \to \mathbf{R}$．如果$\forall x, y \in A$，f满足

$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$，则 f 是凸的．如有需要可看 [VE] 第 130 页．

11.9.14　支撑函数． 具体计算球 $B(a, r)$ 上一点的支撑函数和以原点为中心的立方体上一点的支撑函数．证明：如果 f 和 g 分别是 A 和 B 的支撑函数，则 Minkowski 和集 $\lambda A+\mu B$ 的支撑函数就是 $\lambda f+\mu g$．

11.9.15　凸函数的可微性． 设 A 是一个开凸集，并且 $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ 是一凸函数．证明对于外围空间的一个标架 $\{e_i\}$ 来说，如果在一点 $a \in A$ 处存在偏导数 $\partial f/\partial x_i$，则 f 在 a 点是可微的．由此借助于 11.8.10.3 推出 f 是几乎处处可微的(利用 Fubini 定理)．

11.9.16　凸集和数的几何． 设 Λ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的单位网格，即 $\Lambda=\{(x, y): x, y \in \mathbf{Z}\}$．又设 C 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个紧凸集，且是对称的，即 $-C=C$．证明：如果 C 的面积(参见 9.12 或 12.2)满足 $\mathcal{L}(C) \geqslant 4$，则 $C \cap(\Lambda \backslash(0,0)) \neq \varnothing$，即 C 含有两个坐标都是整数且不全为零的点(Minkowski 定理)．推广到任意的 d 维空间中去．再从 Minkowski 定理推出：如果 $f(x, y)=a x^2+2 b x y+c y^2$ 是一个正定的二次型，判别式 $D=a c-b^2$，则存在两个全不为零的整数 x, y 使得 $f(x, y) \leqslant \frac{4}{\pi} \cdot \sqrt{D}$．关于“数的几何”最简单的结果的发展情况，可看一本很出色的书 [CS]．也可看 [DE 3] 第 230—231 页和 [LE]．

11.9.17　证明对于欧几里得仿射空间 X 内的任意紧凸集 A，有 $\operatorname{Is}_A(X)=\operatorname{Is}_{\operatorname{Extrem}(A)}(X)$．

11.9.18　在 11.5.8 Jung 定理和 11.7.1 Helly 定理之间是否存在一个关系?

11.9.19　Kakutani 引理． 设 C_1 和 C_2 是两个不相交的凸集，且 $x \notin C_1 \cup C_2$．用 Γ_i 表示 $\{x\} \cup C_i$ 的凸包络 $(i=1,2)$．证明两个集合 $\Gamma_1 \cap C_2$ 和 $\Gamma_2 \cap C_1$ 中至少有一个为空集．

11.9.20　核． 使 A 关于 x 是星形集的 $x \in X$ 所成的集合 $N(A)$ 称

为仿射空间X中子集A的核(参见 11.1.2.4)．证明$N(A)$恒为凸的。研究若干个子集A的核$N(A)$。

11.9.21 Lucas 定理． 设P是一个复系数多项式，并且P'是其导数多项式．证明：在$X = C$时，P'的所有的根属于多项式P的根集的凸包络．

若P是三次多项式，且有三个不同的根，认为a，b、c；p，q为P'的根．证明存在一个以p，q为焦点的椭圆，使得三角形$\{a, b, c\}$的三条边相切于此椭圆(如有需要，可利用 17.6.3.6)．

11.9.22 找出把平面分成两个凸集的所有的划分．

11.9.23 Kritikos 定理． 设C是欧几里得空间E中一个内部非空的紧凸集K的边界．对于K的内部的任意一点m，用$R(m)$表示以m为中心、包含K的最小球面的半径，用$r(m)$表示以m为中心被包含在K内的最大球面的半径．证明：在K内存在唯一的一点m，使得差$R(m) - r(m)$为极小．

证明：对于此点m，相伴的外接球和内切球分别至少同C有两个公共点。

由此推出，对于E的任意一个紧的、凸的可微超平面C，至少存在这样的一点，由该点至少可以引出C的 4 条法线。

第 12 章　多胞形，紧凸集

这一章是重要的；由于在前面积累了不少知识，我们在这里已能证明许多困难的结果。多胞形是内部非空的紧多面体；它们是平面上凸多边形和三维空间中凸多面体的推广。

前面三节叙述多胞形的基础内容：面、体积、面积、对偶性和标准的例子。

12.4，12.5，12.6 三节用来介绍正多胞形。它是在第 1 章里已经见过的平面上正多边形和三维空间中正多面体的推广。尽管它们看起来简单，但是对正多胞形的确切定义必须多加小心；由于这个缘故，12.4 节是用来讨论正多边形的，以便读者为接受一般的定义作好准备。12.5 节的主要内容是正多胞形的一些例子；其中有些是很容易的，仅仅是把三维空间中的正四面体、立方体和正八面体推广到任意维空间中去。比较困难的是证明三维空间中十二面体和二十面体的存在性，在第 1 章中已经指出过这一点。最后，列出了四维空间中三个多胞形，其中有两个是相当复杂的。

12.6 节则是给出正多胞形的分类：结论可能会使人感到意外；不仅二维的情形（无限多个正多边形）很特别，而且，当维数 $d\geqslant 5$ 时，事情更为简单，那时，只有三个正多胞形：立方体，余立方体和正则单形。在三维和四维的情形，既有十二面体、二十面体，又有上面介绍的四维空间中三个正多胞形，所以三维和四维的情形是例外的。有关这方面的内容，在 12.6.8 中给出一个带有启发性的注解。

12.7 节证明 Euler 公式：对于任意一个三维多面体，顶点数减去棱数加上面数，恰好等于 2，这是代数拓扑的入门内容。

12.8 节用于研究 Cauchy 定理，该定理表明，同平面多边形的情形相反，三维的凸多面体是不能绕它的棱弯曲的。这是一个

叙述很简单，但证明很难的定理。

最后三节给出下述等周不等式的证明：在面积给定的紧凸集中，球面具有最大的体积。为了得到这一结果，首先必须定义紧凸集的面积，而在 9.12.7 中我们已经注意到，对于任意一个紧集，要定义其面积是颇为困难的。在这里，解决问题的关键是理想地用多胞形去逼近紧凸集，从而利用连续性可把多胞形的面积延拓成为紧凸集的面积。我们给出了等周不等式的两种古典证明，原因是这两种证法都很简洁漂亮。证明只有球面具有最大体积是更为困难的。有关这一问题的历史发展情况的参考文献，是在这一章中陆续列出的。

对于三维多面体，我个人认为，用纸(或硬纸板)、圆规、剪刀和胶水构作不同类型的多面体是有益而且有趣的；对此，如有需要，可参阅基本的参考文献 [WN]。也可参看 [LP]。

我们考虑的每一个空间 X 均是维数为有限数 d 的实仿射空间。除 12.1 节和 12.7 节外，在 X 上都已安装了一个欧几里得结构。在 12.4 节中维数为 2，在 12.7 和 12.8 中维数为 3。

12.1 定义，例子，面

12.1.1 定义． X 的一个凸多面体是 X 的这样一个子集，它是闭半空间的有限交(参见 2.7.3)；一个多胞形就是一个内部非空的紧凸多面体(参见 11.2.7)。当 $\dim X = 2$ 时，一般不说多胞形，而称之为多边形。

12.1.2 例子

12.1.2.1 平行六面体． 如果 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,d}$ 是一个单形，则平行六面体

$$P = \left\{x_0 + \sum_{i=0}^{d} \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i};\ \lambda_i \in [0,1]\ \forall i\right\}$$

是一个多胞形(参见 9.12.4.2)。

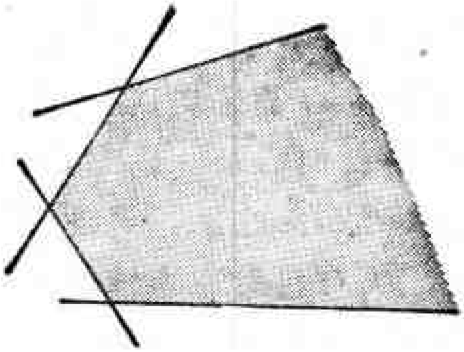


图 12.1.1.1

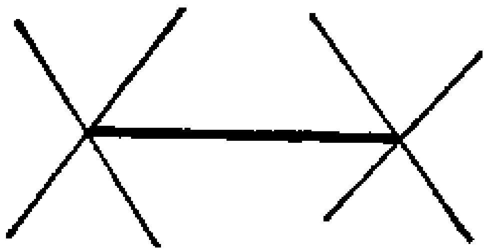


图 12.1.1.2.

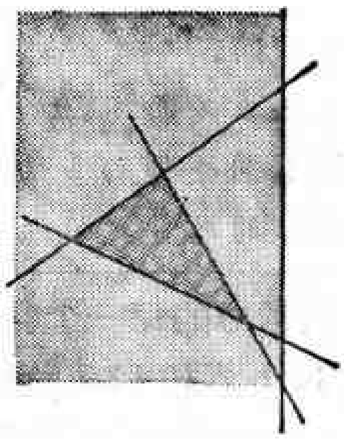


图 12.1.1.3.

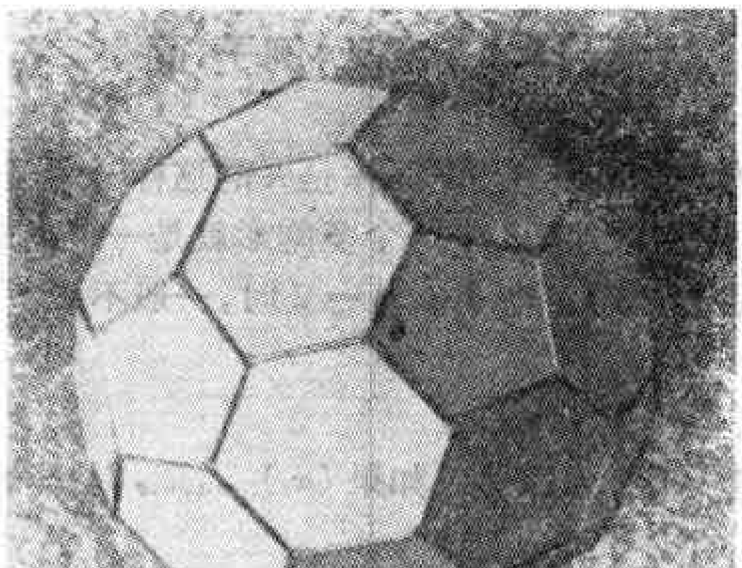


图 12.1.1.4.

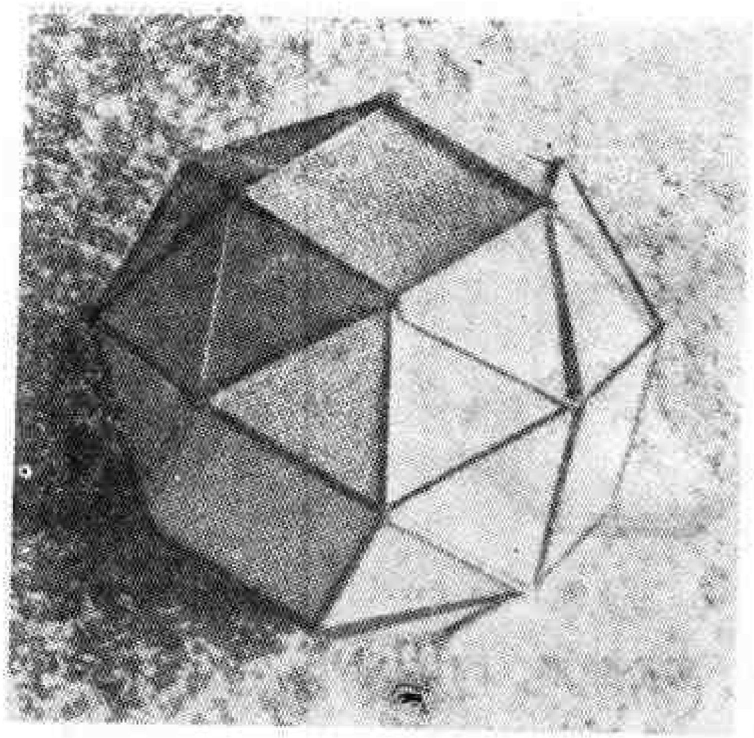


图 12.1.1.5. A. Holden, «形状、空间和对称», CEDIC 出版社.

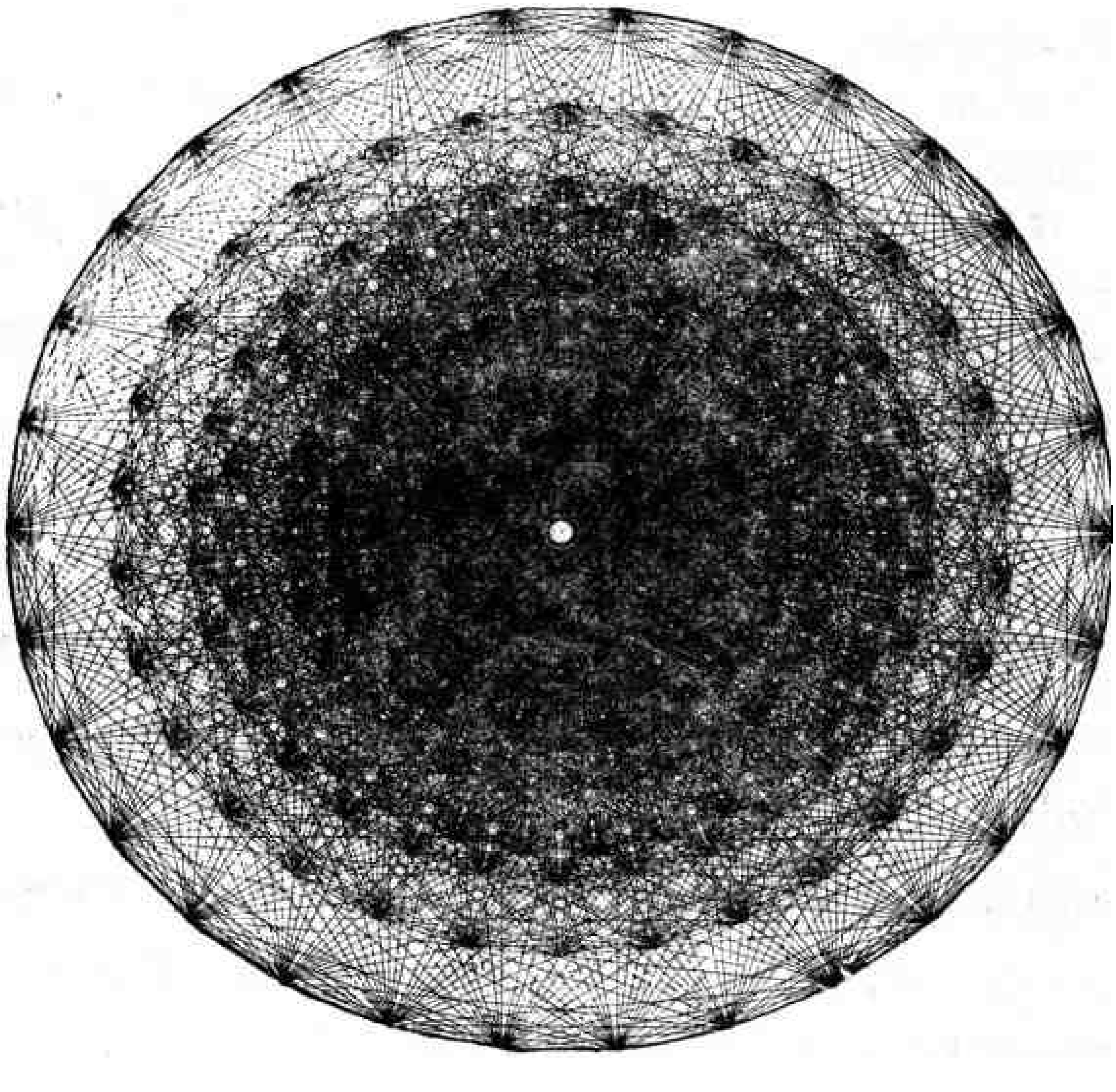


图 12.1.1.6. Coxeter, «正则复形多胞形», 剑桥大学出版社.

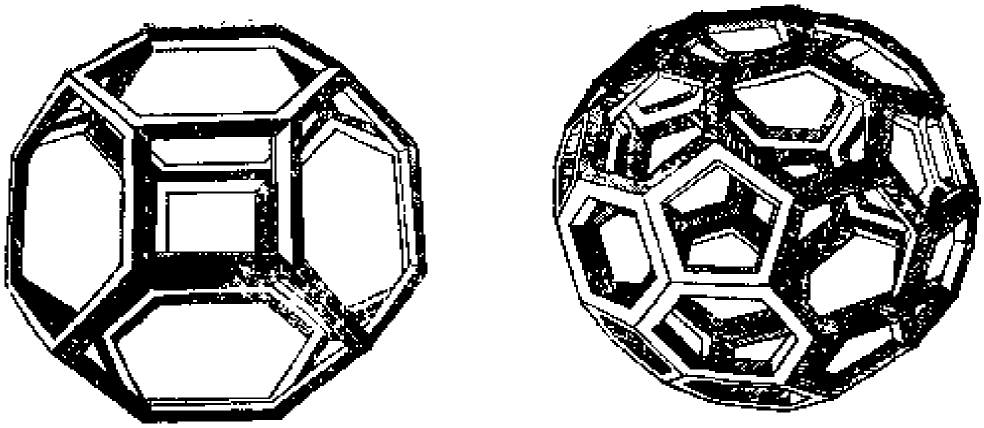


图 12.1.1.7. 达·芬奇为 Luca Paccidi 长老《神奇的比例》一书所作的插图.

12.1.2.2 实心单形. 同样

$$S = \left\{\sum_{i=0}^{d} \lambda_i x_i:\ \lambda_i \geqslant 0, \sum_i \lambda_i = 1\right\}$$

也是一个多胞形.

12.1.2.3 一个球是一个紧凸集. 然而，只要 $d \geqslant 2$，它就不是多胞形.

12.1.2.4 凸多面体的有限交仍是凸多面体. 一个凸多面体和一个仿射子空间之交仍是此仿射子空间中的一个凸多面体；如果此子空间同一个多胞形的内部相交，则上述结论对于该多胞形依然成立.

12.1.2.5 三个标准的多胞形是必须掌握的：

——标准立方体 $\mathrm{Cub}_d = \{(x_1, \cdots, x_d):\ |x_i| \leqslant 1\ \forall i = 1, \cdots, d\}$，

——标准余立方体 $\mathrm{Coc}_d = \left\{(x_1, \cdots, x_d):\ \sum_i |x_i| \leqslant 1\right\}$，

——标准实心单形 $\mathrm{Simp}_d = \left\{(x_1, \cdots, x_{d+1}):\ \sum_i x_i = 1, x_i \geqslant 0\ \forall i\right\}$；

立方体和余立方体是 $\mathbf{R}^d$ 中的多胞形，而 Simp_d 是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的超平面 $H = \left\{(x_1, \cdots, x_{d+1}):\ \sum_i x_i = 1\right\}$ 中的一个多胞形. 我们分别把

欧几里得空间中每个与 Cub_d, Coc_d 和 Simp_d 相似的(参见 9.12.3) 多胞形称为 d 维立方体，d 维余立方体和 d 维实心单形. 我们注意到，当 $d=2$ 时，立方体和余立方体是恒同的. 但当 $d\geqslant 3$ 时，立方体和余立方体是不同的，例如可从 12.1.11.2 和 12.1.11.3 看出这一点.

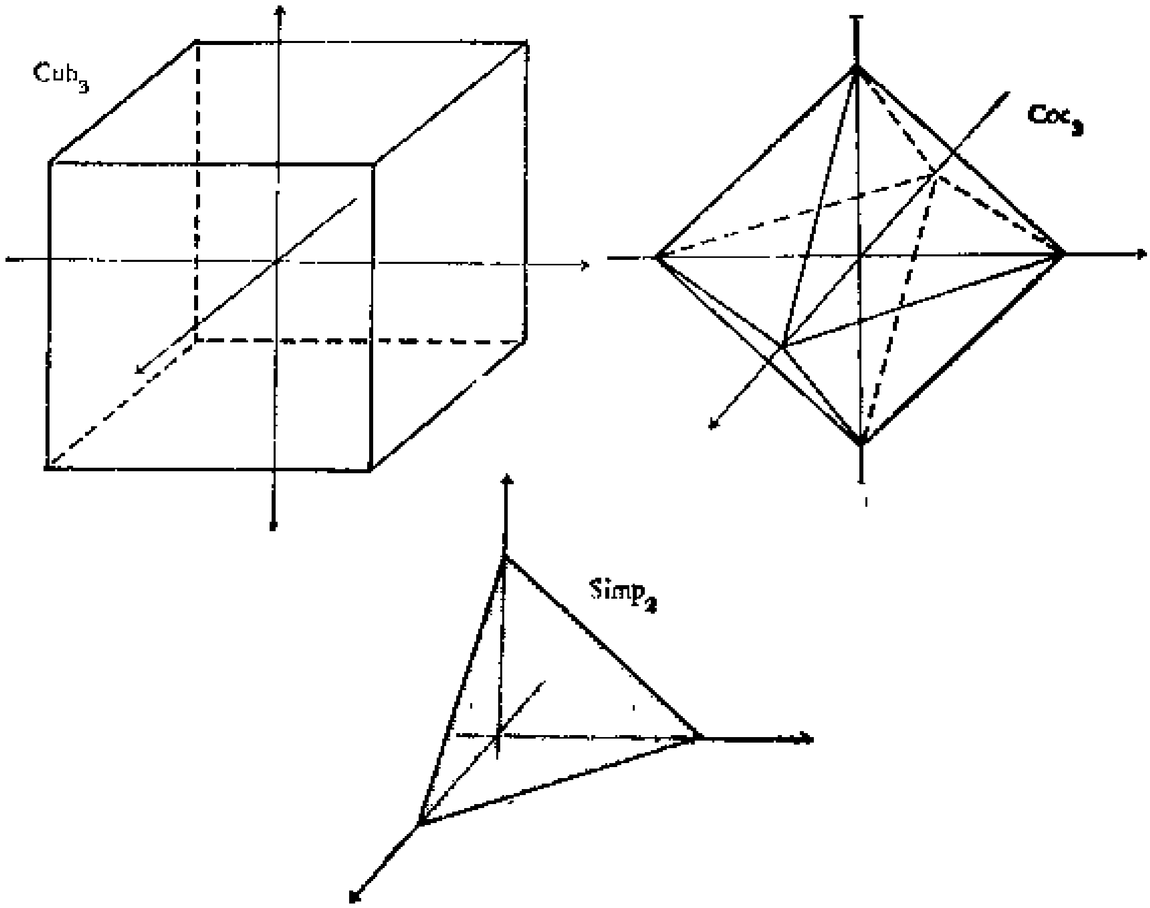


图 12.1.2.5.

12.1.2.6 对偶. 在这一节中，X是一个欧几里得向量空间；设 $(a_i)_{i=1,2,\cdots,n}$ 是X中有限个点，且 $Q=\mathscr{E}(a_1,\cdots,a_n)$ 是 $(a_i)_{i=1,2,\cdots,n}$ 的凸包络，则凸集 Q^*，即Q的配极(参见 11.1.5)是一个凸多面体；若还有 $0\in\mathring{Q}$，则 Q^* 是一个多胞形，称为Q的对偶.

由定义: $Q^*=\left\{x\in X:\left(x\,\middle|\,\sum_i\lambda_i a_i\right)\leqslant 1\ \ \forall\lambda_i\geqslant 0,\ \sum_i\lambda_i=1\right\}$；因而 $Q^*=\bigcap_i\{x\in X:\ (x|a_i)\leqslant 1\}$ 是一个凸多面体. 接下

来再应用 11.4.8 即可.

12.1.2.7 例子. Cub_d 的对偶是 Coc_d, Coc_d 的对偶是 Cub_d. 注意,我们很快就会看到,在多胞形全体和有限多个点的具有非空内部的凸包络全体之间有一个恒等关系(参见 12.1.15). 从而,我们证明了下述的命题:

12.1.2.8 命题. 设 X 是一个已给的欧几里得向量空间. 对于任意一个多胞形 Q, 若 $0\in Q$, 则 Q^* 仍是一个内部含有 0 点的多胞形,而且 $Q^{**}=Q$. 称 Q^* 是 Q 的对偶.

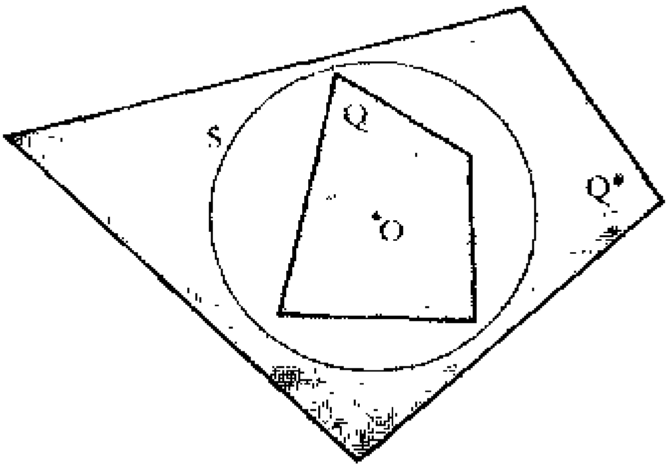


图 12.1.2.8.

12.1.3 附注

12.1.3.1 多面体(未必是凸的)是指什么呢? 有一种定义是这

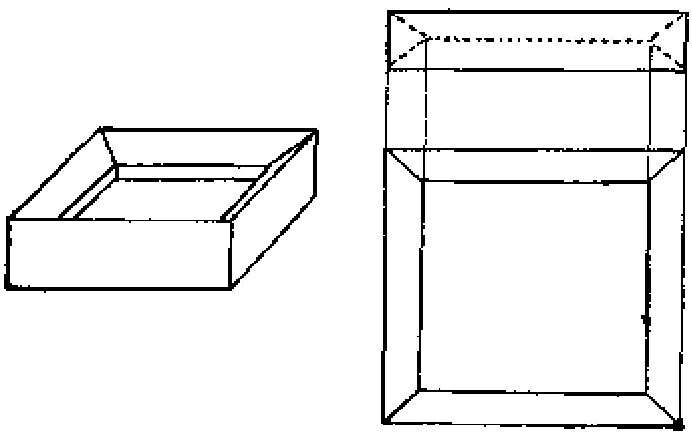


图 12.1.3.1.

样的：一个多面体是紧凸多面体的有限并集．我们注意到这些多面体不一定是凸的，甚至不一定是单连通的．在某些几何中就采用上述的定义，例如可参看[HR]；对于别的定义和其它的观点，

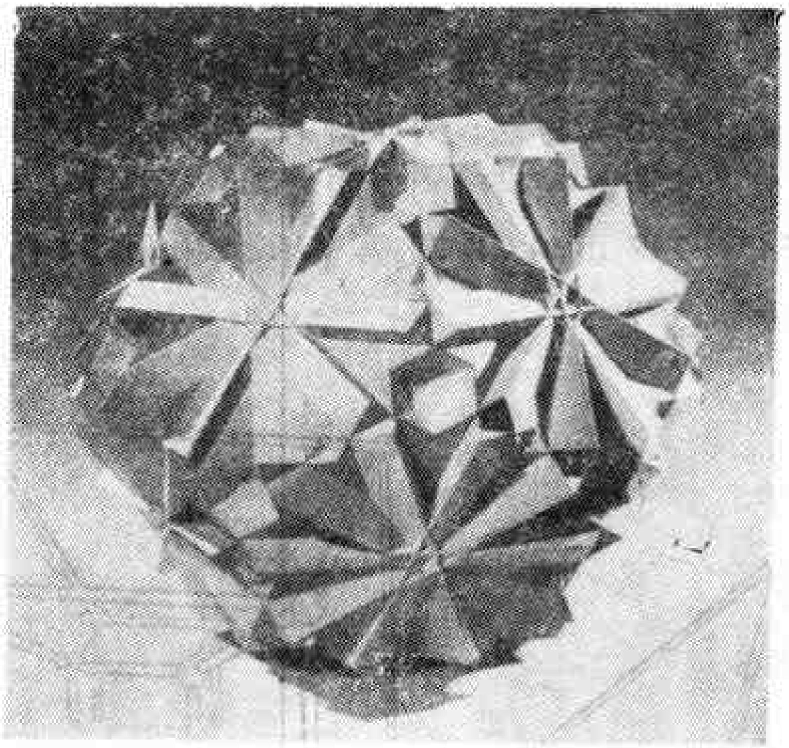


图 12.1.3.2.1.　Wenninger，«多面体模型»，剑桥大学出版社．

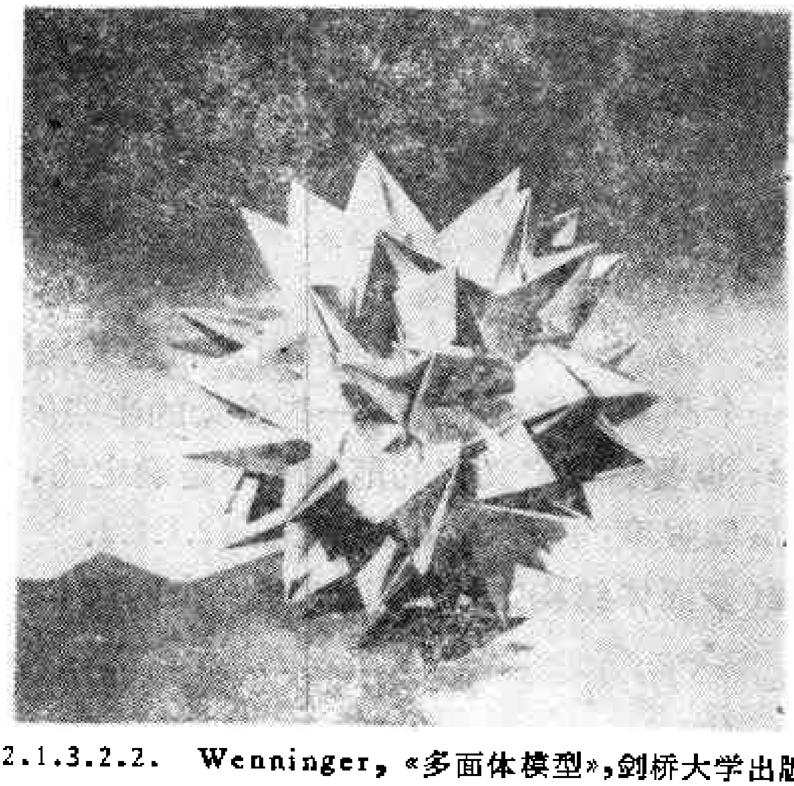


图 12.1.3.2.2.　Wenninger，«多面体模型»，剑桥大学出版社．

例如可看 [AV], [ST-RA], [ZN] 第 229 页.

12.1.3.2 关于用纸板手工构作多面体及其形形色色的变体，基本参考文献是 [WN]; 要花好几个钟头才能制作出图 12.1.3.2.2 中的多面体.

12.1.3.3 为了在 2 维平面上表示 3 维、4 维或者维数更高的多面体，可采用好几种办法; 例如图 12.1.1.7, 12.1.3.3, 12.5.6.1—12.5.6.5 所示. 关于这些图形的说明或者其它的方法，参考文献有 [H-C] 第 145—147 页, [CR 2] 第 VIII 章和 [FT 2] 最末插页中的立体摄影望远镜.

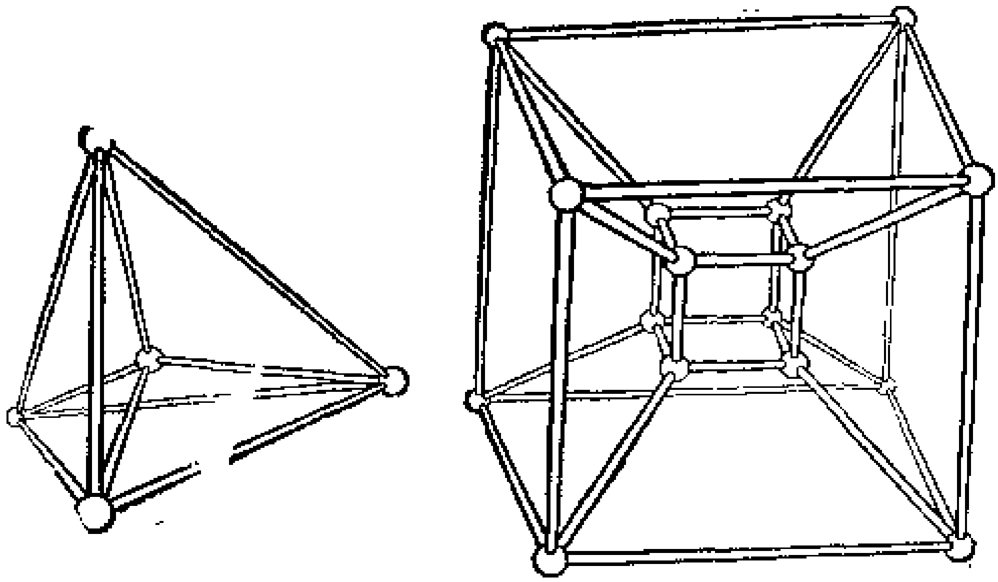


图 12.1.3.3.

12.1.4 注意. 为了很好地领会下面的内容的意义. 很重要的一点是要明瞭一个凸多面体可能是用一些多余的半空间来定义的，见图 12.1.1.3; 也要明瞭定义它的范围未必是确定的，甚至在半空间个数已达最低限度的情形亦如此，见图 12.1.1.2.

12.1.5 定理(多面体结构定理). 设 P 是一个内部非空的凸多面体，且设 $P=\bigcap_{i=1}^{n} R_i$ 是一个最低限度的写法，即 R_i 都是闭半空间，并且 P 不能写作个数比 n 更小的有限多个闭半空间之交，则

(i) 若不计次序，则 R_i 都是确定的；

(ii) 若 H_i 表示定义 R_i 的超平面 $\mathrm{Fr}\, R_i$，则 $H_i \cap P$ 是 H_i 内一个内部非空的凸多面体，称为 P 的第 i 个面（当 $d=2$ 时，称为第 i 条边），记作 $\mathrm{Face}_i P$；

(iii) $\mathrm{Fr}\, P = \bigcup_i \mathrm{Face}_i P$.

12.1.6

约定：以后凡将一个内部非空的凸多面体写为 $P=\bigcap_i R_i$ 时，总是指最低限度写法。

设固定 i，$P' = \bigcap_{j \neq i} R_j$；则由于是最低限度写法，故存在 $x \in P' \setminus R_i$. 设 $a \in \mathring{P}$，根据 11.2.4，有 $y = [a, x] \cap H_i \in \mathring{P}'$，于是，$y$ 在 H_i 中属于 $H_i \cap P'$ 的内部. 因为 $\mathring{R}_i = R_i \setminus H$ 以及 $\mathring{P} = \bigcap_i \mathring{R}_i$，故有

$$\mathrm{Fr}\, P = \bigcup_i \left[\mathrm{Fr}\, R_i \cap \left(\bigcap_{j \neq i} R_j\right)\right] = \bigcup_i (H_i \cap P) = \bigcup_i \mathrm{Face}_i P.$$

最后，因为所有的 H_i 都是不同的，公式 (iii) 表明：所有的面都是作为 X 的子集而由 P 决定的，R_i 自然更是如此.

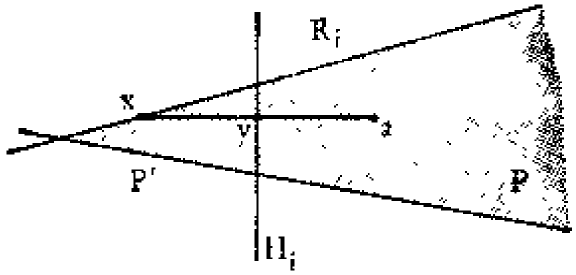


图 12.1.6.

12.1.7 例子. 如果 P 是一个多胞形，它的面仍为多胞形. 如果 H 是 X 的一个超平面，$H \cap \mathring{P} = \varnothing$，并且 P 是一个多胞形，则 $H \cap P$ 是 H 的一个多胞形，$H \cap P$ 的面则是 $H \cap \mathrm{Face}_i P$. 因为我们可以在 P 的面上再开始作“面”运算，故有下述的定义：

12.1.8 定义. 设 P 是一个内部非空的凸多面体. 把 P 的 $(k+1)$

维面中的一个面称为P的k维面．其中的面是从P的$(d-1)$维面开始的$(k=0,1,\cdots,d-1)$．一维面称为棱（当$d=2$时，称为边）．两个k维面的交集如果为$(k-1)$维面，则称这两个k维面是相邻的．

现在，读者想必会猜到，0维面就是11.6.1的意义下的顶点；确切地说：

12.1.9 命题． 设P是一个内部非空的凸多面体；则

(i) 设$x\in \operatorname{Fr} P$，则所有带有包含x的面的超平面的交集与P在点x处的支撑超平面的交集是一致的．特别，P的阶数为α的点都是P的α维面的相对内部的点；于是，P的顶点和0维面是一致的；

(ii) P的顶点和P的端点是一致的．

如果H是P的支撑超平面，则由H定义的一个半空间，比如说R，必满足$P=P\cap R$，于是由12.1.5可知：如果H不是H_i中的某一个，则不必加以考虑，由此得到(i)．如果$x\in \operatorname{Fr} P$不是端点，则存在一线段$[y,z]\subset \operatorname{Fr} P$，而$x\in]y,z[$，故$x$的阶数大于0．

12.1.10 推论． 设X是欧几里得向量空间．Q是一个多胞形，使得$0\in \mathring{Q}$，则Q的k维面集合同对偶多胞形Q^*（Q关于单位球面的配极，参见10.7.11）的$(d-k-1)$维面集合之间存在双射如下：如果Y是决定所考虑的k维面的k维子空间，则确定Q^*的相应的面的子空间Y^*是Y的所有点的配极超平面的交集．

从12.1.9和11.5.3即得推论．

12.1.11 标准的例子

12.1.11.1 标准单形． 设$(e_i)_{i=1,\cdots,d+1}$是$\mathbf{R}^{d+1}$空间的一个典范底．因为标准单形是这$d+1$个向量的凸包络，故顶点必在这$d+1$个点之中．这样，它就恰好有$d+1$个顶点，这是因为采用的已是最低限度写法．同样的理由，$(e_i)_{i=1,\cdots,d+1}$中任取$i+1$个元素组成一个子集，其凸包络为标准单形的一个i维面，并且不存在其它的i维面了．所以i维面是$\binom{d+1}{i+1}$个，并且，每一个均

是正则单形.

12.1.11.2 标准立方体. 标准立方体的面是 $2d$ 个超平面 $x_i=\pm 1$ $(i=1,\cdots,d)$, 这是因为其中没有一个是多余的(参见12.1.5). 但一个这样的面是 $(d-1)$ 维的立方体, 因而 Cub_d 所有的面都是立方体. 一个这样的 k 维面可如下具体写出: 将 x 的 $d-k$ 个坐标值取定为 ± 1, 其它坐标的绝对值小于、等于 1; 因此立方体具有 $\binom{d}{k}2^{d-k}$ 个 k 维面. 特别, 它具有 2^d 个顶点和 $2d$ 个面; 这 2^d 个顶点是 $(\pm 1,\cdots,\pm 1)$.

12.1.11.3 标准余立方体. 我们应用 12.1.2.7, 12.1.11.2 和 12.1.10 可以推出: Coc_d 的每一个面是正则单形, 并且, k 维面有 $\binom{d}{k+1}\binom{d}{k+1}2^{k+1}$ 个. 特别, 它有 $2d$ 个顶点 $\pm e_i$, 这里 $\{e_i\}$ 是典范基底. Coc_d 有 2^d 个面.

12.1.12 多胞形的二面角. 我们注意到, d 维多面体的任意一个 $(d-2)$ 维面 A, 都恰好有两个面 F, F' 经过它. 事实上, 利用对偶性(参见 12.1.10), 这归结为找一条棱的顶点, 而此棱作为一条线段, 正好含有两个顶点.

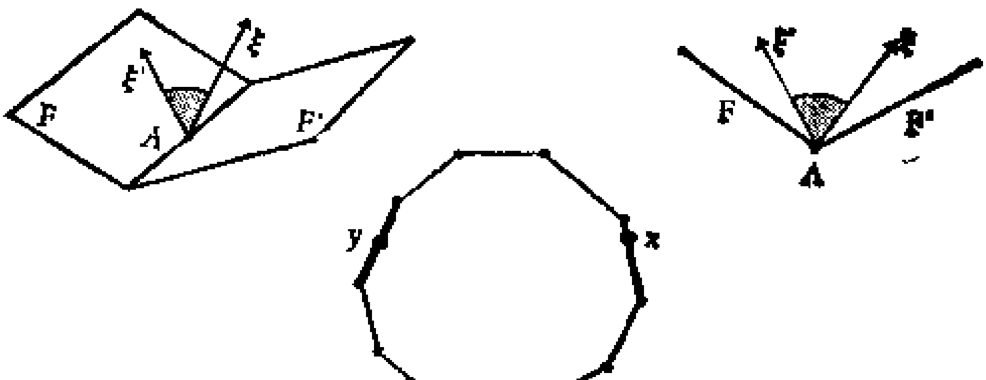


图 12.1.12.

超平面 F 和 F' 确定了 X 的两个单位向量 ξ, ξ', 其中 ξ 是与 F 正交的, 并且在 F 靠 F' 的一侧, 因而是定义好的, ξ' 也是如此.

作为定义，P 在 $(d-2)$ 维面 A 处的二面角就是角度 $\overline{\xi\xi'}\in]0,\pi[$；如果 $d=2$，二面角就是角，而 A 是 P 的一个顶点。

12.1.13 命题. 对一个多胞形的任意两个面，总能通过一连串相邻的面把它们联系起来。

设任有 $x, y\in P$. Y 是 X 中包含 x 和 y 的一个平面；则 $Y\cap P$ 是一个多边形，它的边是 P 的面和 Y 的交集。于是，问题归结为在 P 是一个多边形的情形来证明命题；但是，如果 F 是一条边，$\bar{F}$ 是含 F 的所有的边并含与其中任一边相邻的那些边的集合，则 $\bar{F}$ 是 $\mathrm{Fr}\,P$ 的一个开集，且又是闭集；而 $\mathrm{Fr}\,P$ 是连通的。

12.1.14 附注. 当 P 用定义它的半空间的显式方程给出时（其中可能有多余的半空间），具体地研究 P 的顶点是应用数学中一个重要的课题（参见 11.8.10.10）。与顶点研究有关的算法方面的参考文献可看 [KE] 第 86 页或 [R-V] 第V章。

12.1.15 命题. 一个多胞形 P 的顶点个数是有限的，P 则是它们的凸包络。反过来，有限多个点的凸包络是一个紧的凸多面体。

更一般地，任意的 k 维面 $(k=0,1,\cdots,d-1)$ 的个数是有限的，因为从一条线段具有两个端点这一事实出发，利用归纳法即可看出这一点。对反过来的情形，我们可以假设凸包络 Q 是内部非空的，并把它安放到由它生成的子空间中去(参见 11.2.7)；在它的内部一点向量化 X，赋予它一个欧几里得结构，并考虑多胞形 Q^*（参见 12.1.2.8）；根据命题的第一部分，Q^* 是有限多个点的凸包络，因此，再应用一次 12.1.2.8，即证得 $Q^{**}=Q$ 为一多胞形。

12.1.16 推论. 若 P 是 X 的一个多胞形，且 $f\in A(X,Y)$，则 $f(P)$ 是 $f(Y)$ 的一个多胞形。

12.1.17 推论. 设 P, Q 是两个多胞形；则它们的 Minkowski 和集 $\lambda P+(1-\lambda)Q$ 仍是一个多胞形 $\forall\lambda$（参见 11.1.3）。

设 $P=\mathscr{E}((a_i))$, $Q=\mathscr{E}((b_j))$. 由于 $\lambda P+(1-\lambda)Q$ 是一个凸集，故首先有

$$\lambda P+(1-\lambda)Q\supset\mathscr{E}((\lambda a_i+(1-\lambda)b_j)).$$

但又有

$$\lambda P+(1-\lambda)Q\subset\mathscr{E}((\lambda a_i+(1-\lambda)b_j)).$$

这是因为：设 $p=\sum_i \lambda_i a_i$，$q=\sum_j \mu_j b_j$ 使得

$$\sum_i \lambda_i=1,\ \sum_j \mu_j=1,\ \lambda_i\geqslant 0,\ \mu_j\geqslant 0\quad \forall i\forall j,$$

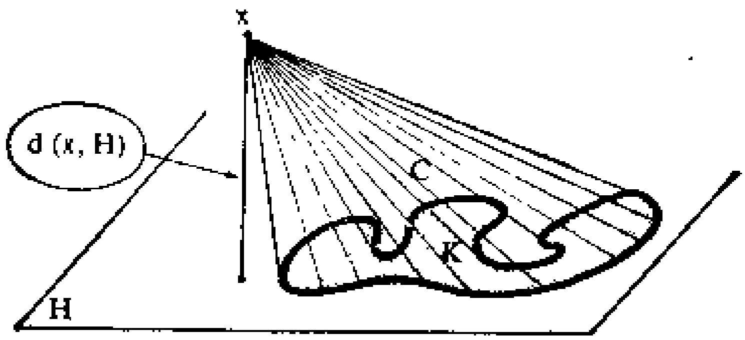
则有 $\lambda p+\mu q=\sum_{i,j}(\lambda_i\mu_j)(\lambda a_i+(1-\lambda)b_j)$.

从 12.2 到 12.6 各节中，X 是欧几里得仿射空间。

12.2 多胞形的体积

现在，X 是一个欧几里得空间，我们采用 9.12 中关于体积的记号和定义。特别，多胞形有一个体积。

12.2.1 设 H 是一个超平面，$x\notin H$，K 是 H 的一个紧集，并且 $C=\mathscr{E}(\{x\}\cup K)$ 是"以 x 为顶点，K 为底的角锥体"，则有：



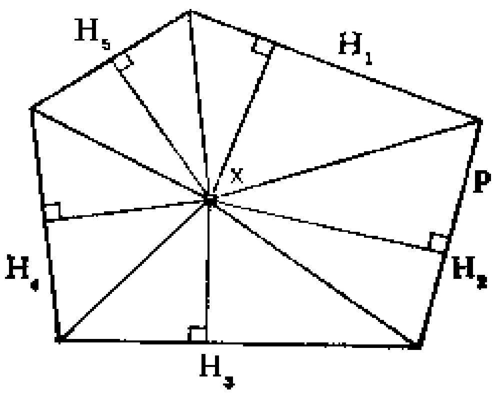


图 12.2.2.

12.2.2 $\mathfrak{L}(C)=\frac{1}{d}\cdot d(x,H)\mathfrak{L}_H(K)$.

事实上,不加改动地沿用 9.12.4.4 的证明即可.

12.2.3 命题. 设 $P=\bigcup_i R_i$ 是一个多胞形(参见 12.1.6), $a\in\mathring{P}$; 则有

$$\mathfrak{L}(P)=\frac{1}{d}\sum_i d(a,H_i)\mathfrak{L}_{H_i}(\mathrm{Face}_i P).$$

事实上, 根据 12.1.5 (iii) 有 $P=\bigcup_i \mathscr{E}(\{a\}\cup\mathrm{Face}_i P)$. 而

$$\begin{aligned}&\mathfrak{L}(\mathscr{E}(\{a\}\cup\mathrm{Face}_i P))\cap\mathscr{E}(\{a\}\cup\mathrm{Face}_j P)\\&\quad=\mathfrak{L}(\mathscr{E}(\{a\}\cup(\mathrm{Face}_i P\cap\mathrm{Face}_j P)))=0,\end{aligned}$$

因为 $\mathrm{Face}_i P\cap\mathrm{Face}_j P$ 是被包含在一个 $(d-2)$ 维子空间内的. 因此,利用加法,从 12.2.2 即得 12.2.3.

12.2.4 附注. 在练习中将要证明: 对于任意一点 $a\in X$, 如果用代数距离 $d'(a,\cdot)$ 代替"几何"距离 $d(a,\cdot)$,则 12.2.3 依然成立. 这里, $d'(a,\cdot)$ 定义如下:

$$d'(a,H_i)=\begin{cases}d(a,H_i) & \text{当 } a\in R_i,\\ -d(a,H_i) & \text{当 } a\notin R_i.\end{cases}$$

12.2.5 多胞形的初等体积.

正如标题所表明的那样,读者可以看出,用 Lebesgue 测度去定义多胞形的体积这种相当初等的对象,实在是代价过于昂贵;至于平面多边形的面积,甚至三角形的面积就更是如此了. 实际上,我们能用非常初等的方法证明:

12.2.5.1 定理. 给定一个欧几里得空间 X 和 X 的一个边长为 1 的立方体 C, 则存在唯一的一个映射 Φ, 把多胞形 P 的集合映到 $\mathbf{R}_+$ 中,且满足三条公理:

(VE I) 对于 X 的任意一个平移 t 和任意一个多胞形 P, 有 $\Phi(t(P))=\Phi(P)$,

(VE II) 对于任意的多胞形 P,Q, 若 $\mathring{P}\cap Q=\varnothing$, 且 $P\cup Q$ 是一个多胞形,则 $\Phi(P\cup Q)=\Phi(P)+\Phi(Q)$,

(VE III) $\Phi(C)=1$.

证明是初等的，但是很长．一个很好的参考文献是[HR]的第2章．关于定理的证明应该注意几点：首先是要证明对任意选取的一个 a，Φ 必应由按照 12.2.4 改写的公式 12.2.3 给出．其次，要证明这个公式实际上已提供了一个 Φ，满足全部三条公理．从而，对于任意一个 $f\in \mathrm{Is}(X)$ 可推得 $\Phi(f(P))=\Phi(P)$，因而 Φ 实际上不依赖于立方体 C 的选取(这一点可使我们放心了)．这个 Φ 称为多胞形的初等体积．

12.2.5.2 在[HR]中，我们能发现许多有关初等体积的有趣内容，也能找到许多关于 $(d-1)$ 维测度的许多有趣内容(参见 9.12.7)．关于初等体积，尽管它看上去很简单，然而还是有大量的问题提了出来．其中之一是著名的 Hilbert-Dehn 问题，这个问题的背景是这样的：读者在研究证明 12.2.5 时，将会看到其中有分析的论证：一则用到了 Φ 的连续性，二则，为了证明一个单形 S 的体积等于 $\frac{1}{d}\times$(高度)$\times$(底体积)，先用内接棱柱多胞形逼近 S，再通过求极限的过程完成证明．对于 $d=2$ 的情形，没有这个必要，因为一个平行四边形是两个对称三角形的和，于是，我们可用 $t\in \mathrm{Is}(X)$ 代替(VE I)中仅有的平移，强化公理(VE I)，用更初等的方法来构作 Φ，例如参看[HD I]第 292 页．Hilbert 提出的

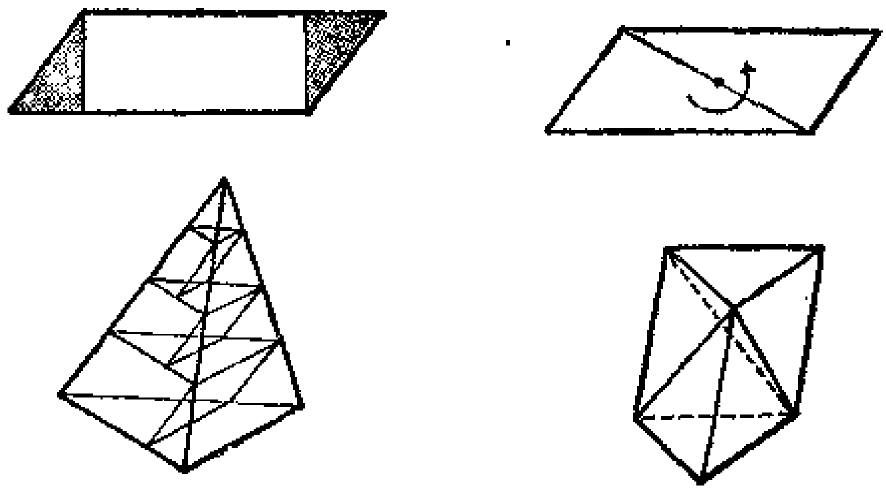


图 12.2.5.

问题如下：X 中两个体积相等、维数大于或等于 3 的多胞形是不是总能分解成相互等距的一些多胞形？Dehn 首先对 $\mathbf{R}^3$ 中多胞形作了考察，他证明了这是不可能的．事实上，Dehn 对此问题给出了明确的判定准则．最简单的反例是取一个单位立方体和一个体积为 1 的正则单形（参见 12.1.2.5)，参见［HR］第 49—52 页．对此，V. G. Boltianskii 在《Hilbert 第三问题》(John Wiley 出版社，1978 年)一书中用图形作了很好的阐述．

12.3 多胞形的面积

设 $P=\bigcap_i R_i$ 是欧几里得空间 X 的一个多胞形；它的面 $\mathrm{Face}_i P$ 分别是欧几里得空间 $H_i\subset X$ 中的多胞形，因此它们的体积为 $\mathfrak{L}_{H_i}(\mathrm{Face}_i P)$．从而，根据 12.1.5 (iii)，$P$ 的边界 $\mathrm{Fr}\, P=\bigcup_i \mathrm{Face}_i P$ 容有一个自然的 $(d-1)$ 维体积 (参见 9.12.7)，它等于 $\sum_i \mathfrak{L}_{H_i}(\mathrm{Face}_i P)$：我们援用通常的三维空间的情形，称它为多胞形的面积，以免老是要写 $d-1$．最后，这可写成：

12.3.1 定义． 一个多胞形 $P=\bigcap_i R_i$ 的面积，记作 $\mathfrak{A}(P)$，是正的数量 $\mathfrak{A}(P)=\sum_i \mathfrak{L}_{H_i}(\mathrm{Face}_i P)$ (当 $d=2$ 时，就是周长)．

12.3.2 例子．

如果 f 是 X 的一个比值为 μ 的相似，则对任意一个多胞形 P，我们有

$$\mathfrak{A}(f(P))=\mu^{d-1}\mathfrak{A}(P).$$

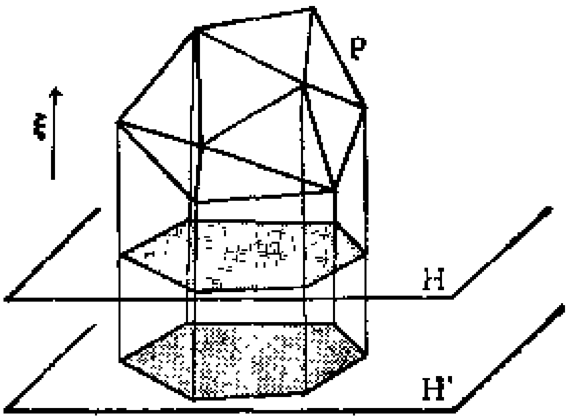
从定义和 9.12.3 可得出此结果．

下面的公式表明：在适当的意义下，一个多胞形的面积是对于空间中全体超平面方向而言，该多胞形在这些超平面上投影体积的平均值．为了把它写成公式，设 K 是 X 的一个紧集，H 是一个超平面，并且 $p: X\to H$ 是 X 到 H 上的正交投影，则我们注意到，

$\mathfrak{L}_H(p(K))$ 只依赖于 H，而同 H 无关．如果 ξ 是 X 的一个单位向量，即 $\xi \in S = S(0, 1)$，S 是 $\vec{X}$ 的单位球面，则称 $\mathfrak{L}(p_\xi(K))$ 是 K 在任意一个使 $\xi \in \vec{H}^\perp$ 的超平面 H 上的投影 $p(K)$ 在 H 内的体积．利用 9.12.9.5 中的记号，就有：

12.3.3 定理 (Cauchy 公式)．对于任意的 $d \geqslant 2$ 和任意的多胞形 P，如果 σ 表示 S 的典范测度（参见 18.3.7），我们有

$$\mathfrak{A}(P) = (\beta(d-1))^{-1}\int_{\xi \in S} \mathfrak{L}(p_\xi(P))\sigma.$$



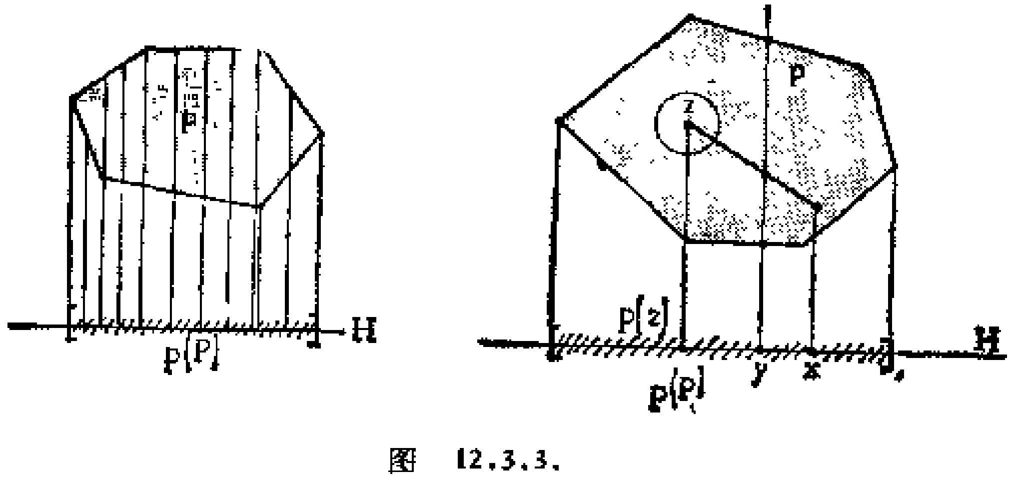


图 12.3.3.

12.3.3.1 第一步．现在取定一个 $\xi \in S$，满足唯一的条件：$\forall i$，$\xi \notin \vec{H}_i$，这里 H_i 是 $P = \bigcap_i R_i$ 的面的超平面．我们预先注意到，由这些 ξ 所组成的集合在 S 内有一个零测度的补集，对于这样的一个 ξ，我们来证明 $\sum_i \mathfrak{L}(p_\xi(\text{Face}_i P)) = 2\mathfrak{L}(p_\xi(P))$；应证在上

述图形中该式显然成立，即如果不计零测度集合，那么 $p(P)$ 内任意一点恰好是 $\mathrm{Fr}(P)$ 中两点在 p 下的象点，这里 $p: X\to H$，并且 $\xi\in(\vec{H})^{\perp}$.

然而，我们有 $\mathfrak{L}(p(P))=\mathfrak{L}(\widehat{p(P)}^{\circ})$. 设 $y\in\widehat{p(P)}^{\circ}$；必须证明 $p^{-1}(y)\cap\mathring{P}\neq\emptyset$，因为这时 $p^{-1}(y)$ 才不是缩成为一点的一条线段，而且它的边界恰好有两点．任取 $z\in\mathring{P}$；如果 $p(z)=y$，则已证毕，否则，存在 $x\in p(P)$，使得 $y\in[z,x[$，且对于任意的 $u\in p^{-1}(x)$，根据 11.2.4 有 $t\in p^{-1}(y)\cap[z,u]\in\mathring{P}$.

12.3.3.2　第二步． 对于每一个 H_i，固定一个 $u_i\in S$，使 $u_i\in\vec{H}_i^{\perp}$. 根据 9.12.4，$\mathfrak{L}(p_\xi(\mathrm{Face}_i P))=|(\xi|u_i)|\cdot\mathfrak{L}_{H_i}(\mathrm{Face}_i P))$，于是，由 11.3.1 就有

$$\int_{\xi\in S}\mathfrak{L}(p_\xi(P))\sigma=\frac{1}{2}\int_{\xi\in S}\left(\sum_i\mathfrak{L}_{H_i}(\mathrm{Face}_i P)\right)|(\xi|u_i)|\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\sum_i\left[\mathfrak{L}_{H_i}(\mathrm{Face}_i P)\int_{\xi\in S}|(\xi|u_i)|\sigma\right].$$

然而，对于任意一个单位向量 u，有

$$\int_{\xi\in S}|(\xi|u)|\sigma=2\beta(d-1);$$

这是一个古典的公式，用微积分就可以证明，参见 12.12.19，但是，不用微积分也可证明如下：因为在等距变换下是不变的，所以，这是一个与 ξ 无关的数量 $k(d)$，应用 12.10.4.1 就能找到 $k(d)$.

公式 12.3.3 有其独立的意义；此外，我们在 12.10 中用它来定义任意一个紧凸集的面积.

12.3.4　附注． 由 Minkowski 所解决的一个令人瞩目的问题是：当各个面的体积和方向给定时，确定这个多胞形．对此问题有下列很好的文献：[LU]，[AV] 和 [PV 1].

12.3.5　关于多胞形的 Steiner-Minkowski 公式．

设 P 是一个多胞形；我们记得

$$B(P,\lambda)=\{x\in X:\ d(x,P)\leqslant\lambda\}(\lambda\in\mathbf{R}_+).$$

我们打算研究体积 $\mathfrak{L}(B(P,\lambda))$ 和它在 λ 处的性状．下面两个图

形说明：当 $d=2$ 时，可见 $B(P,\lambda)$ 包括三个部分：P 本身；在 P 的各边上构作的高为 λ 的矩形的并集；半径为 λ 的一些扇形的并集。依 $\mathfrak{A}(P)$ 的定义，第二部分的面积为 $\sum_i \lambda \mathfrak{L}_{H_i}(\mathrm{Face}_i P) = \lambda\mathfrak{A}(P)$. 为了计算第三部分，我们把这些扇形通过平移汇集到同一个中心处，从而看出它们形成一整个圆盘，因而其面积为 $\pi\lambda^2$（参见 9.12.4.4）。所有这一切，都在不计零测度集的差别的条件下成立，因此就有

$$\mathfrak{L}(B(P,\lambda)) = \mathfrak{L}(P) + \mathfrak{A}(P)\lambda + \pi\lambda^2.$$

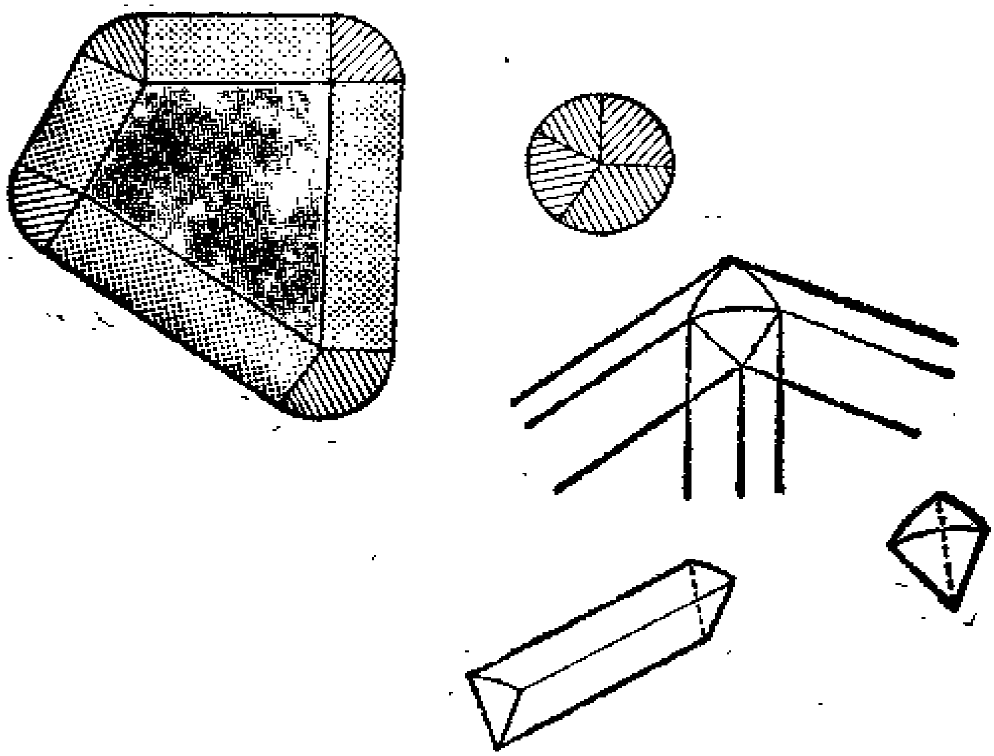


图 12.3.5.

当 $d=3$ 时，可见 $B(P,\lambda)$ 自然地由 4 个部分所组成：P 本身；P 的各个面上构作的高为 λ 的直平行六面体的并集；扇形与棱的正交乘积的并集；以及其并恰好是整个球的球块。第三部分的体积为 λ^2. 上述粗略的设想，可形式化地归结为下述的命题和它的证明。

12.3.6 命题. 对于任意一个 d 维多胞形 P，伴有数量 $\mathfrak{L}_i(P)\in\mathbf{R}$；

$(i=0, 1, \cdots, d)$，使得

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}_+^*, \ \mathfrak{L}(B(P, \lambda)) = \sum_{i=0}^{d} \mathfrak{L}_i(P)\lambda^i.$$

此外，

$$\forall P, \ \mathfrak{L}_0(P) = \mathfrak{L}(P), \ \mathfrak{L}_1(P) = \mathfrak{A}(P), \ \mathfrak{L}_d(P) = \beta(d).$$

12.3.6.1 设 $y \in P$ 并且有唯一的 $x \in P$，使得 $d(x, y) = d(y, P)$（参见 11.1.7.1）。从 9.2.2 和 11.6.2 的证明推出：对于任意的 $k \geqslant 0$，我们有 $d(x + k\overrightarrow{xy}, P) = kd(x, y)$。如果 CN_x 是点 $x \in \operatorname{Fr} P$ 处的一个法锥，置 $S_x = CN_x \cap S(0, 1)$，它是 $\vec{X}$ 的单位球面上的一个子集（参见 11.6.2）；据前所述，恰好有

$$B(P, \lambda) \backslash \mathring{P} = \bigcup_{\substack{x \in \operatorname{Fr} P \\ \xi \in S_x}} [x, x + \lambda\xi].$$

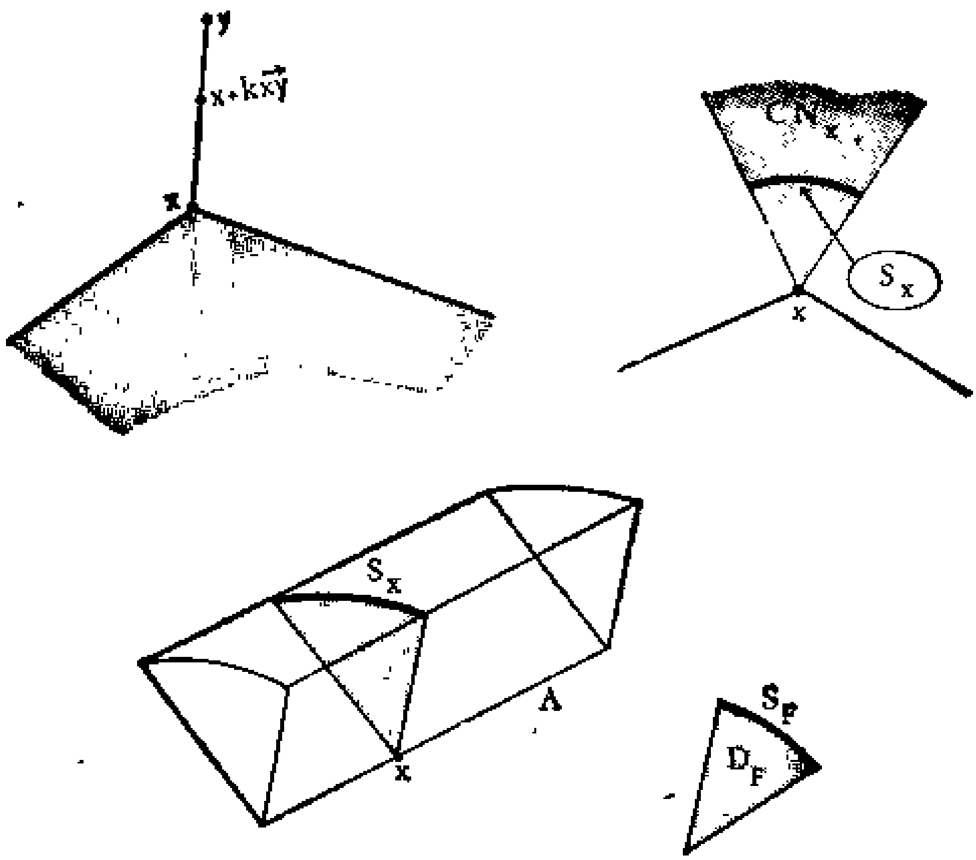


图 12.3.6.

12.3.6.2 对 $x \in \operatorname{Fr} P$，用 ω_x 表示它的阶数，并置

$$\Omega_i = \{x \in \operatorname{Fr} P : \omega(x) = i\} \quad (i = 0, 1, \cdots, d-1).$$

这就是说，Ω_i 是 P 的 i 维面的相对内部的并集：参见 12.1.9。对于 $i=0,1,\cdots,d-1$，令

$$B_i(\lambda)=\bigcup_{x\in\Omega_i}\bigcup_{\xi\in S_x}[x,x+\lambda\xi].$$

由此推出

$$B(P,\lambda)\backslash\mathring{P}=\bigcup_{i=0}^{d-1}B_i(\lambda).$$

这样得到了 $B(P,\lambda)\backslash\mathring{P}$ 的一个分解，从而

$$\mathfrak{L}(B(P,\lambda))=\mathfrak{L}(P)+\sum_{i=0}^{d-1}\mathfrak{L}(B_i(\lambda)).$$

12.3.6.3 现在，特别应该注意，当 x 在一个给定的面 F 的相对内部 F^* 上取遍一切值时，锥 CN_x 是不动的，因此 S_x 也不动；从而可记之为 S_F 并令 $D_F=\bigcup_{\xi\in S_x}[0,\xi]$。$CN_x$ 由含 x 的那些面的超平面所决定，而当 x 取遍 F^* 时它的面是不会改变的，由此可有前面的做法。

如果 F 是一个给定的 i 维面，则有下面的等式

$$\bigcup_{x\in F^*}\bigcup_{\xi\in S_x}[x,x+\lambda\xi]=F^*\times([0,\lambda]S_F).$$

其实，在这里用到了一个等距和直线的正交直积。

应用 9.12.3 中的两个例子，我们有

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(F^*\times([0,\lambda]S_F))&=\mathfrak{L}(F^*)\mathfrak{L}([0,\lambda]S_F)\\&=\mathfrak{L}(F)\mathfrak{L}(D_F)\lambda^{d-i},\end{aligned}$$

这里体积 $\mathfrak{L}(F)$，$\mathfrak{L}(D_F)$ 分别是在使它们有意义的 i 维和 $(d-i)$ 维的空间中考虑的。

12.3.6.4 用 Φ 表示 P 的全体 i 维面的集合。由前所述可知：

$$\mathfrak{L}(B_i(\lambda))=\mathfrak{L}_{d-i}(P)\lambda^{d-i}$$

且

$$\mathfrak{L}_{d-i}(P)=\sum_{F\in\Phi_i}\mathfrak{L}(F)\mathfrak{L}(D_F).$$

特别当 $i=d-1$ 时，因为 $D_F=[0,1]$，故有

$$\mathfrak{L}_1(P)=\sum_{F\in\Phi}\mathfrak{L}(F)=\mathfrak{A}(P).$$

当 $i=0$ 时，前述内容和 11.6.2 表明：
$\bigcup_{x\in\Phi} S_x = S$ 或者 $\bigcup_{F\in\Phi} D_F = B(0,1)$，因为 F 是一个点，并且 $\mathfrak{L}(F)=1$，故由此推出 $\mathfrak{L}_d(P)=\mathfrak{L}(B(0,1))=\beta(d)$。

在 12.10.6 中，我们要用到下述命题：

12.3.7 命题. 已给 $a\in X$ 和 $r>0$. 则在包含于 $B(a,r)$ 内的多胞形集合上，函数 $\mathfrak{L}_i(.)$ 是有界的.

固定一个 $\lambda>0$，则有 $B(P,\lambda)\subset B(a,\lambda+r)$ 以及 $\mathfrak{L}(B(P,\lambda))\leqslant\beta(d)(r+\lambda)^d$. 因为

$$\mathfrak{L}(B(P,\lambda))=\sum_i \mathfrak{L}_i(P)\lambda^i\leqslant\beta(d)(r+\lambda)^d$$

中的每一项均是正的，故对任意的 i，有

$$\mathfrak{L}_i(P)\leqslant\beta(d)\frac{(r+\lambda)^d}{\lambda^i}.$$

12.3.8 注. 现在，我们可以来阐明在 9.12.7 中提到的“涂漆”的思想了. 在给 P 涂漆时，我们若涂上厚度很小(为 λ) 的均匀的一层，则在略去不计 λ^2, λ^3, $\cdots$ 等项时，体积应为 $\mathfrak{L}(B(P,\lambda))-\mathfrak{L}(P)=\mathfrak{A}(P)\lambda$；从而油漆的总量必定同面积 $\mathfrak{A}(P)$ 成比例. 在 12.10.7 中，我们将继续这一讨论.

12.4 正多边形

在这一节和下面两节中，X 是欧几里得仿射空间，d 表示它的维数. 在本节中 $d=2$.

本节很简单，是为任意维正多胞形的定义作准备的.

12.4.1 定义. 若多边形的各边长度相等，且各角也相等，则称为正多边形.

上述两个条件都是必要的. 根据 10.5.2，如果 n 表示多边形的边数，则角度的公共值为 $\frac{n-2}{n}\cdot\pi$.

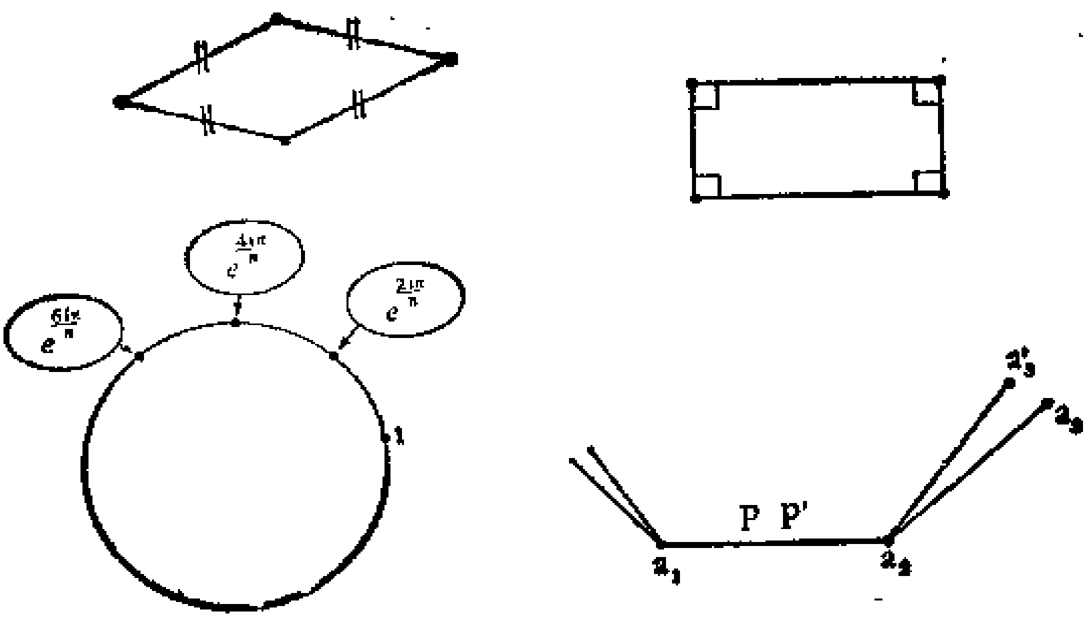


图 12.4.1.

12.4.2 命题. 对于任一整数 $n\geqslant 3$，总存在一个 n 边正多边形. 两个边数相等的正多边形必是相似的.

为证存在性，取 $\{e^{2ik\pi/n}:\ k=0,1,\cdots,n-1\}\subset\mathbf{C}=\mathbf{R}^2$ 即可. 为在不计相似差别的条件下证得唯一性，根据 9.6.2 可假设 $P=\mathscr{P}(a_i)$，$P'=\mathscr{P}(a'_i)$. 具有公共边 $a_1=a'_1$，$a_2=a'_2$，而且 P，P' 是在由 $\langle a_1, a_2\rangle$ 决定的同一个半平面内. 则由角相等和边相等的条件，推出 $a_3=a'_3$. 利用归纳法可得 $P=P'$.

12.4.3 公式. 根据 12.4.2，每一正多边形内接于一个圆：称此圆的圆心为多边形的中心；如果 r 是此圆的半径，l 是各边公共长度，则有

$$\boxed{l=2r\sin\frac{\pi}{n}.}$$

为了把正多边形的概念推广到任意维情形，引入一个多边形的稳定群 $G(P)=\mathrm{Is}_P(X)$（参见 9.8.1），于是有：

12.4.4 命题. 一个多边形 P 是正多边形的充要条件是 $G(P)$ 关于序对 (x, F) 是可迁的，这里 (x, F) 是由 P 的一个顶点 x 和 P 的一条含 x 的棱 F 所组成的.

必要性．只要首先证明 $\{e^{2ik\pi/n}\}$ 多边形容有一个群 $\mathbf{Z}_n$ 关于顶点可迁就够了；然后，我们就可把问题归结为 (x, F)，(x, F') 的情形加以研究．这时或有 $F = F'$，或有 $F \neq F'$．在后一种情况，关于直线 $\langle 0, x\rangle$ 的对称把 F 映到 F' 上，并使 x 保持固定不动．

充分性．因为 $G(P)$ 关于顶点是可迁的，故角度都相等．既然对边也是可迁的，故边也都相等．

12.4.5 根据 12.1.12，当 $x \in F$ 时，序对 (x, F) 共有 $2n$ 个．从而根据 9.6.2，我们有 $\# G(P) = 2n$．该群的结构在 1.8.3.4 中已作过研究，它是半直积 $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_2$ 或者是二面群 $\mathscr{D}_{2n}$，参见 0.2．

12.4.6 **几何结构．** 当 $n = 6$ 或 $n = 10$ 时，几何结构如图 12.4.6.1 和图 12.4.6.2 所示．当 $n = 3$ 或 $n = 5$ 时，几何结构当然可从 $n = 6$ 和 $n = 10$ 的情形推出．$n = 5$ 的情形是常常遇到的，要画出正五边形，或要用纸制作正十二面体(参见 12.5.5)，甚至要制作足球(图 12.1.1.4)，都必须充分了解这一情形．

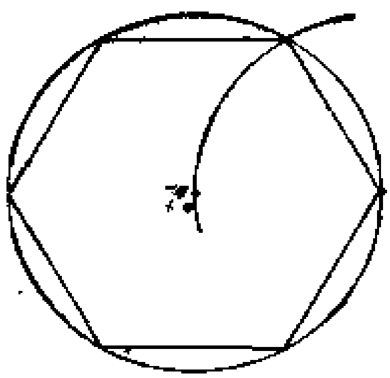


图 12.4.6.1.

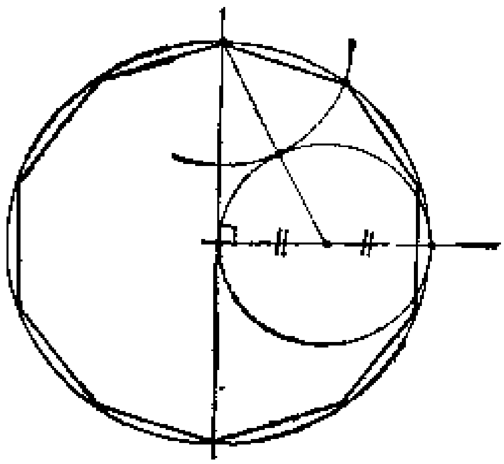


图 12.4.6.2.

如果我们会作一个 n 边正多边形，则我们也能作出一个 $2n$ 边正多边形，因为用直尺和圆规即可作出角的平分线．用直尺和圆规作正 n 边形是一个有趣的代数问题，已被 Gauss 所解决．实际上可以作出的正 n 边形只能是 $n = 2^k n_1 \cdots n_h$ 的情形，这里 n_i 是

互不相同的，形如 $n_i = 2^{2^{\alpha_i}} + 1$ 且是素数．当 α 取什么值时 $F_\alpha = 2^{2^\alpha} + 1$ 是一个素数，这是至今尚未解决的一个数论的问题；我们知道 $F_0 = 3$，$F_1 = 5$，$F_2 = 17$，$F_3 = 257$，$F_4 = 65537$ 都是素数，而这些就是仅知的为素数的 F_α．我们还知道，对众多的 α 值，F_α 不是素数．有一个猜测：作为素数的 F_α 的数目是有限的．关于这些称为"Fermat 数"的 F_α 可看 [HA-WR] 第 14—15 页．

F_1 和 F_2 的情况见图 12.4.6.1 和图 12.4.6.2．关于构作正 17 边形或边数更多的正多边形，关于 Gauss 的结果的证明，可看 [LB 1] 第 110—153 页，或更近代的参考书 [SW] 第 17 章．

12.5 正多胞形：定义、例子

尽管三维情形看起来很简单，但要定义一个正多胞形是并不容易的(有时也称之为正多面体)；必须加上相当强的条件．为了体会这一点，读者可以试试自己来给出定义，或可参看 12.12.7；也请参看古典文献，诸如 [FT 2]，[CR 2]，[HD 2]，读者可对这些文献作评论性的研究．合适的定义是受 12.4.4 的启发而来的．

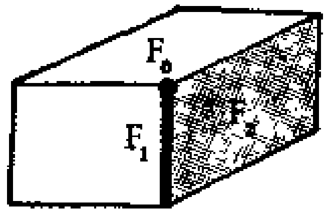


图 12.5.1.

12.5.1 定义． 设给定一个 d 维多胞形 P，d 元组 $(F_0, F_1, \cdots, F_{d-1})$ 由 P 的使 $F_i \subset F_{i+1}$ 的 i 维面 F_i 构成 $\forall i = 0, 1, \cdots, d-2$．则称 $(F_0, F_1, \cdots, F_{d-1})$ 为 P 的旗．如果 P 的稳定群 $G(P) = Is_P(X)$ 对于 P 的所有的旗都是可迁的，则称 P 是正多胞形．

关于更几何化的定义，参看 12.12.7．

12.5.2 推论． 在 12.5.2 中，假设 P 是一个正多胞形．

12.5.2.1 P 的顶点系的重心 O 称为 P 的中心．O 是 $G(P)$ 的不动点，这是因为 $G(P)$ 关于顶点是可迁的，因而所有这些顶点位在以 O 为中心的一个球面上．称此球面为 P 的外接球面．

12.5.2.2 P 的每一个 i 维面 $(i = 2, \cdots, d-1)$ 是一个 i

维的正多胞形。

12.5.2.3 设 F, F' 是 P 的两个相邻的面(参见 12.1.2), 并且 H 是由 $F\cap F'$ 和 P 的中心 O 所生成的超平面, 即 $H=\langle 0, F\cap F'\rangle$, 则对称 σ_H 把 F 映到 F' 上, 即 $\sigma_H(F)=F'$。

12.5.2.4 如果在 P 的中心 O 处向量化 X, 则对偶多胞形 P^* (参见 12.1.2.7) 也是一个正多胞形. 我们有 $G(F^*)=G(P)$。

事实上, 群 $G(P)$ 以 O 为不动点, 故保留极性. 因而从 12.5.1 和 12.1.10 即推出我们的断言。

12.5.2.5 群 $G(P)$ 在 P 的旗上是单可迁的. 事实上, 在一个旗和 P 上都可以利用归纳法唯一地构造一个标准正交标架. 特别, $\#G(P)$ 等于 P 的旗的个数。

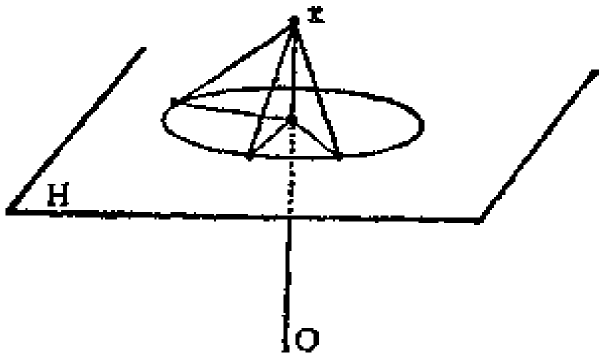


图 12.5.3.

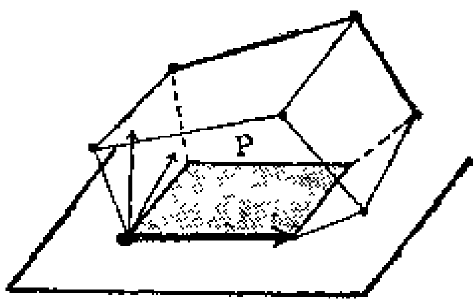


图 12.5.4.

12.5.3 正多胞形的星形集

12.5.3.1 设 P 是一个以 O 为中心的正多胞形, x 是 P 的一个顶点. 如果 A 是 F 中含 x 的一条棱(参见 12.1.8), 又设 y 是另一个顶点. 既然 $G(P)$ 关于序对 (x, A), $x\in A$ 是可迁的, 由此推出 P 的所有顶点都和 y 一样属于同一个与 $\overrightarrow{XO}$ 正交的超平面 H. 交集 $P\cap H$ 是一个多胞形, 以这些 y 作为顶点, 但其 $(i-1)$ 维面是 P 的含 x 的 i 维面同 H 的交集. 因为 $G(P)$ 在 P 的旗上是可迁的, 故在以点 x 作为出发点的旗上更是可迁的. 上述论证正表明了 $G(P)$ 在 $P\cap H$ 的旗上是可迁的。

12.5.3.2 定义. 如此构作的正多胞形称为P在点x处的星形集，记作$\mathrm{Et}_x P$，或简记为$\mathrm{Et}\, P$(因为所有这些星形集都是等距的)。

12.5.3.3 前述内容和 1.5.5 表明:

$$\# G(P) = \# G(\mathrm{Et}\, P) \times (P\text{的顶点数}).$$

12.5.4 一些简单的例子

12.5.4.1 正则单形Simp_d的旗的集合同$(e_i)_{i=1,\cdots,d+1}$的d元组$(e_{i_1},\cdots,e_{i_d})$之间有一个双射. 但是，总存在(参见 8.2.7)一个元素$f\in O(d+1)$，把$(e_{i_1},\cdots,e_{i_{d+1}})$映到$(e_{j_1},\cdots,e_{j_{d+1}})$上，并且使最后一个元素$e_{i_{d+1}}$映成$e_{j_{d+1}}$. 所以，$f\in G(\mathrm{Simp}_d)$；此外，这表明$G(\mathrm{Simp}_d)=\mathfrak{S}_{d+1}$，其中$\mathfrak{S}_{d+1}$是$\{1,\cdots,d+1\}$的双射对称群。再者，$\mathrm{Et}(\mathrm{Simp}_d)$是一个正则单形；

$$\mathrm{Et}(\mathrm{Simp}_d) = \mathrm{Simp}_{d-1}.$$

12.5.4.2 立方体. 利用关于坐标超平面的对称，我们可以找出在顶点$(\pm 1,\cdots,\pm 1)$上可迁的Cub_d的等距(参见 12.1.11.2). 因此，只须再说明$G(\mathrm{Cub}_d)$在包含一个已给顶点的旗上是可迁的. 为此，我们考虑正立方体$C=[0,1]^d\subset\mathbf{R}^d$它与$\mathrm{Cub}_d$是相似的. 设$x=(0,0,\cdots,0)$是$C$的零顶点；含$x$的棱为线段$[0,e_i]$$(i=1,\cdots,d)$，这里$(e_i)_{i=1,\cdots,d}$是$\mathbf{R}^d$的典范基底. 这样，含有$x$的旗的集合同$\mathrm{Simp}_{d-1}$的旗的集合之间有一个双射. 并且，由于$G(\mathrm{Simp}_{d-1})\subset G(C)$，我们已证明了$\mathrm{Cub}_d$是正则的. 但这时，$\mathrm{Et}(\mathrm{Cub}_d)=\mathrm{Simp}_{d-1}$也是正则的。

为了决定群$G(\mathrm{Cub}_d)$. 首先，由 12.5.3.3 和 12.5.4.1 看出：$\# G(\mathrm{Cub}_d)=2^d\cdot d!$. 但是，我们知道$G(\mathrm{Cub}_d)$中一个有$2^d\cdot d!$个元素的子群，就是由$d!$个坐标置换和$2^d$次坐标变号所构成的子群. 这就是所要找的那个群. 它是一个半直积.

12.5.4.3 余立方体. 利用对偶基，从 12.1.2.7, 12.1.10 和 12.5.2.4 推知余立方体Coc_d是一个正多胞形，并且它的群就是Cub_d的群. 可以利用对偶性，也可直接确定$\mathrm{Et}(\mathrm{Coc}_d)$：设$e_1$是$\mathrm{Coc}_d$的顶点，则含$e_1$的棱为线段$[e_1,\pm e_i]$$(i=2,\cdots,d)$，这

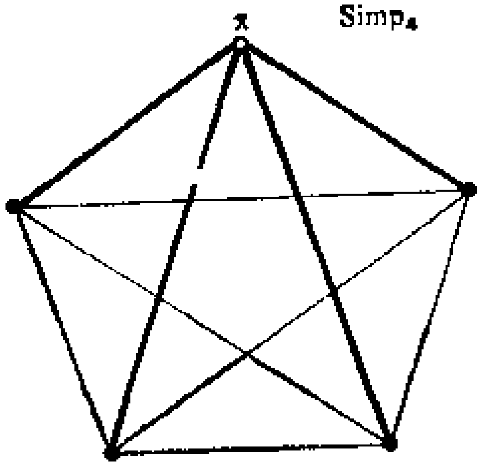


图 12.5.4.1. Et_x 由 · 构成
$Et_x = Simp_3$.

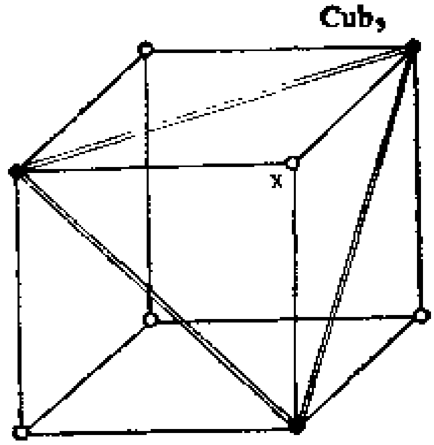


图 12.5.4.2. Et_x 由 · 构成
$Et_x = Simp_2$.

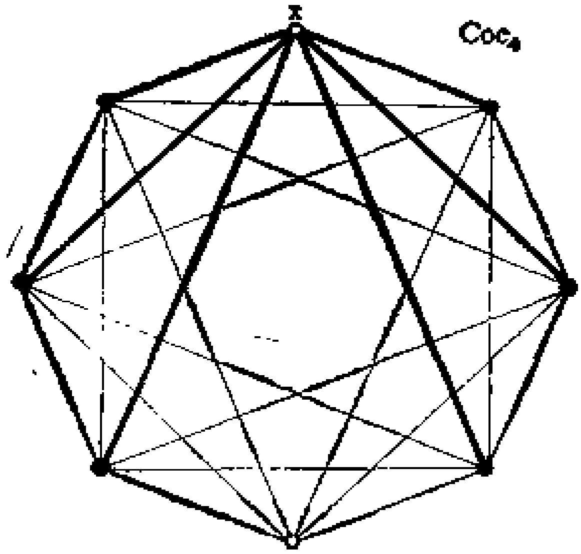


图 12.5.4.3. Et_x 由 · 构成
$Et_x = Coc_3$.

表明 $Et(Coc_d) = Coc_{d-1}$.

12.5.5 三维空间中较难的例子. 在 1.8.3.4 中,我们已经指出，正十二面体和正二十面体的存在性不是很显然的；我们下面给出此存在性的两种证明. 我们预先注意到，正十二面体和正二十面体是彼此对偶的,从而,从其中一个的存在可推出另一个的存在.

12.5.5.1 几何方法. 基本想法是注意到，假定正十二面体存在的话,我们可以在它里面内接立方体;我们将反过来证明在一个

立方体上总能装上若干正五边形，使之形成一个正十二面体：图 12.5.5.1。

12.5.5.2. 引理. 设 F, F', F'' 是三个相等的正五边形．则可在它们的一个公共顶点 x 处，沿它们的公共棱 A, A', A''，把它们连接起来．这样形成的图形是刚性的，换言之，在不计等距差别的条件下是唯一的．图 12.5.5.2 中的直线 $\langle x, y\rangle$, $\langle x, y'\rangle$, $\langle x, y''\rangle$ 是两两正交的．

最简单的办法是利用球面三角．连结的可能性等价于存在一个球面三角形，使其三条边都等于一个正五边形的角，即 $\frac{3\pi}{5}$（参见 12.4）．因为 $3\times\frac{3\pi}{5}<2\pi$，根据 18.6.10，我们的球面三角形是存在的，从 18.6.13.10 即得不计等距意义下的唯一性．

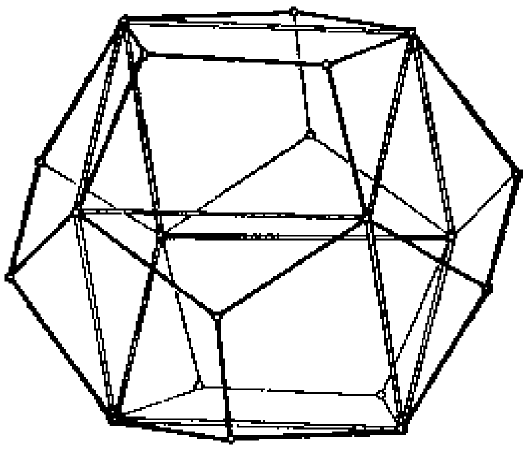


图 12.5.5.1.

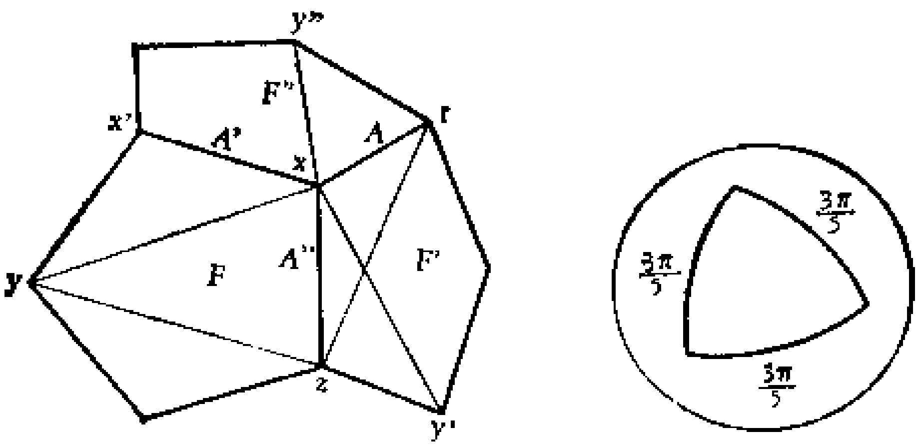


图 12.5.5.2.

为了证明 $\langle x, y\rangle$, $\langle x, y'\rangle$ 的正交性，可推导如下：我们看到，对图形中的三点 y, z, t，因 $\langle y, z\rangle$ 与棱 A' 平行，而 $\langle z, t\rangle$ 与 A 正交(例如，因为 $xz = xt$ 和 $x'z = x't$)，故有 $\langle y, z\rangle \perp \langle z, t\rangle$。但是，关于 A'' 垂直平分超平面的对称 σ_H 把三元组 (y, z, t) 变到 (y, x, y')。这就证明了引理。

至此，我们可以注意到，由 12.5.5.2 的开头和 σ_H，已经有了存在性的一个不太完整的解答，这就是把 F, F', F'' 连结起来，然后再把 $F_1 = \sigma_H(F'')$ 跟 F, F' 连结，依此类推；这就是用纸头构造模型的方法；但是，还须证明的是：在连结到最后时，整个图形确实是封闭的，这一点完全不是显然的。

为此，只须注意到：如果从一个顶点为 x 的立方体 C 出发，则根据图 12.5.5.1，可在自 x 引出的 C 的三条棱 A, A', A'' 上装上三个正五边形 F, F', F''，这是因为 12.5.5.2 表明了 $\langle x, y\rangle$, $\langle x, y'\rangle$, $\langle x, y''\rangle$ 是相互正交的，且具有相同的长度。于是，利用立方体 C 关于各面的超平面的对称，就可构作一个正十二面体，它的面分别是十二个正五边形。为了看出这是一个正十二面体，只须应用 12.5.5.2 中的刚性就行了，因为刚性表明只要我们知道了一个面和该面所决定的、该十二面体所在的那个半空间，如此构作的十二面体就是唯一的。

12.5.5.3 代数方法．我们具体构作一个正二十面体如下；其思想是在一个正八面体(三维空间中余立方体的常用称呼)的棱上找出 12 个顶点，使之构成若干个等边三角形，根据连续性，这显然是可能做到的。遗憾的是，把 20 个全等的等边三角形每五个每五个地连结起来所形成的多胞形必是正多胞形这一点，全然不是显然的；因为，把以 x 为公共顶点的 5 个等边三角形连结起来，并不能如同在 12.5.5.2 中一样，保证在不计等距的意义下的唯一性，我们得到的是一个可以随意弯曲的图形，正如同边长相等的平面 n 边形的情形一样：当 $n > 3$ 时，它是可变形的。在 12.8.6 节，我们还会讨论这些问题。

因此，必须证明我们的二十面体的正则性。据前所述，我们设

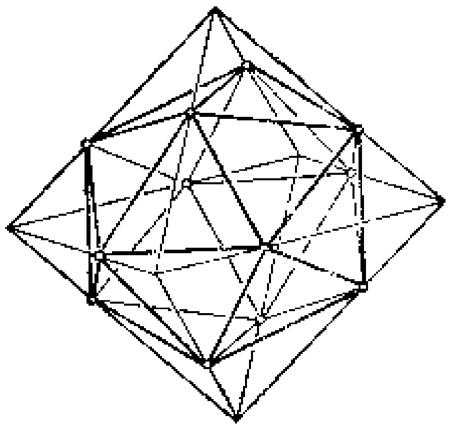


图 12.5.5.3.

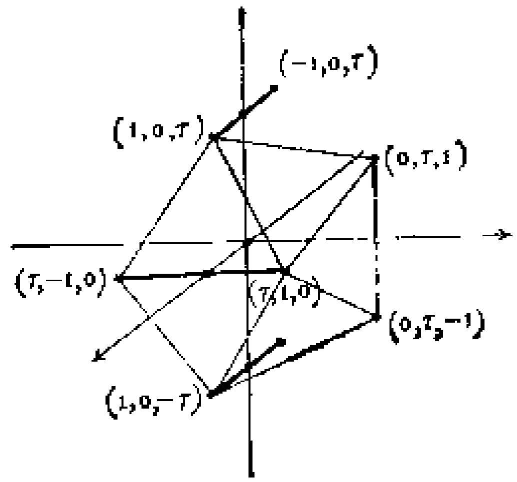


图 12.5.5.4.

法找形如$(0, \pm\tau, \pm 1)$，$(\pm 1, 0, \pm\tau)$，$(\pm\tau, \pm 1, 0)$的十二个顶点，这里τ是待定的。从顶点$(\tau, 1, 0)$出发，它到其它五个顶点$(\tau, -1, 0)$，$(0, \tau, \pm 1)$，$(1, 0, \pm\tau)$的距离取2和$\sqrt{2\tau^2 - 2\tau + 2}$这两个值，故可推出$\tau$应取的值为

12.5.5.4 $\boxed{\tau^2 = \tau + 1,\ \tau > 0,\ 即\ \tau = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}.}$

对此τ，点$(\tau, 1, 0)$和上述5个点是等距的。对所有的顶点，也都是如此(这是因为十二个顶点全体的集合容有一个关于顶点可迁的等距群：由轴的循环置换和关于坐标超平面的对称所生成的等距群)。

现在我们注意到，5个点$(\tau, -1, 0)$，$(0, \tau, \pm 1)$，$(1, 0, \pm\tau)$都在平面$\tau x + y - \tau = 0$上；而由此可推知这五个等边三角形连结后的刚性(图 12.5.5.4)。因此，其轴过一个顶点的5阶旋转保持我们的二十面体不动。这样的旋转再加上前面的群，就构成了旗上的一个可迁群。

12.5.5.5 依照 12.5.5.1 在立方体$(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$上构作的十二面体的坐标，当τ如 12.5.5.4 中取定时，分别为$(0, \pm\tau^{-1}, \pm\tau)$，$(\pm\tau, 0, \pm\tau^{-1})$，$(\pm\tau^{-1}, \pm\tau, 0)$。读者容易验证这一事实，利用对偶性或 12.5.5.1 均可。

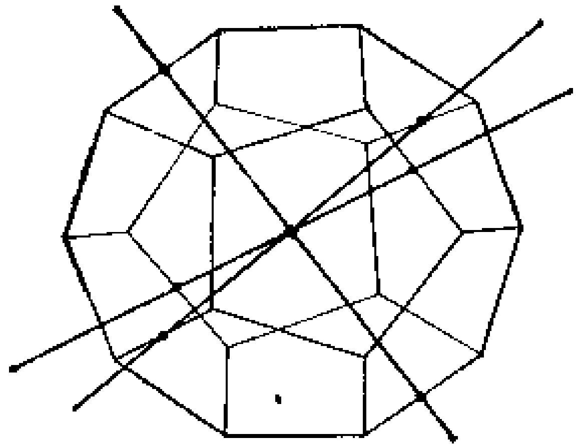


图 12.5.5.6.

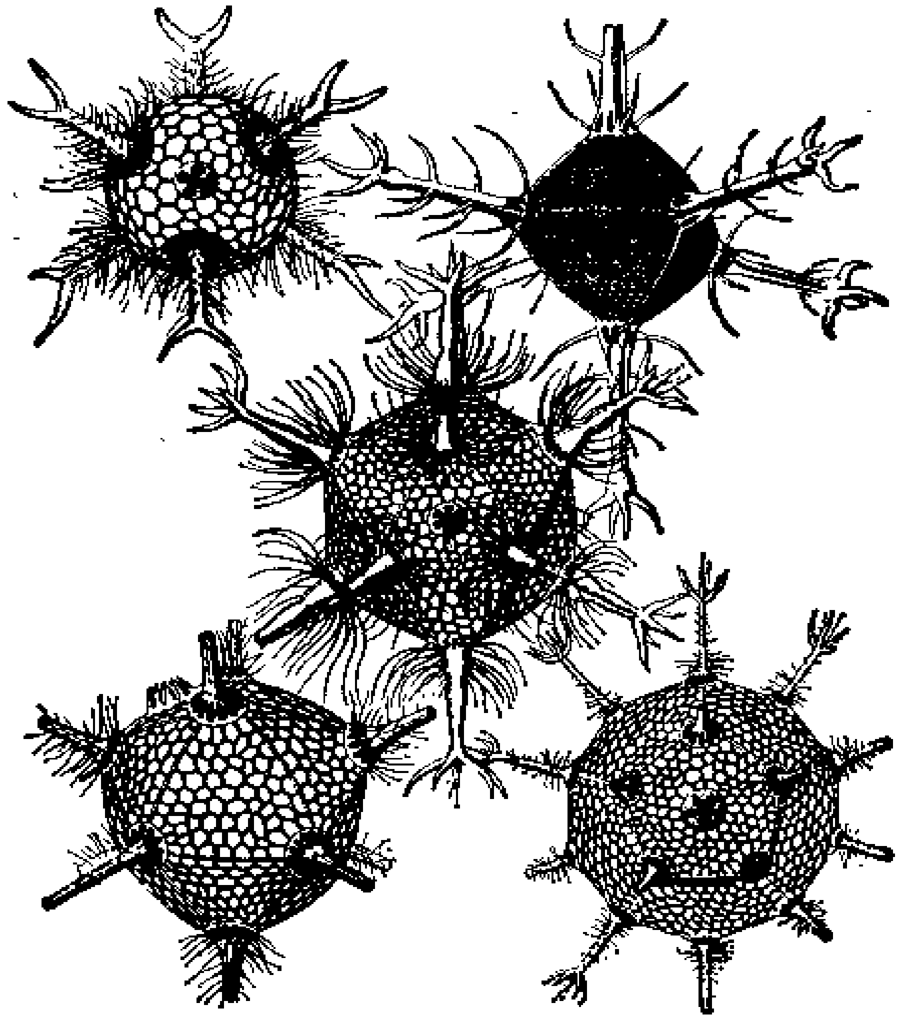
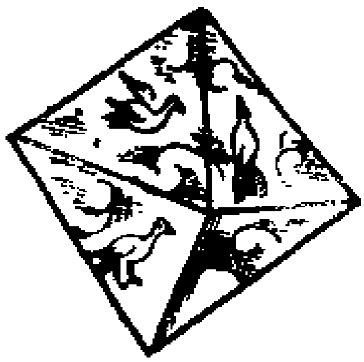


图 12.5.5.7.

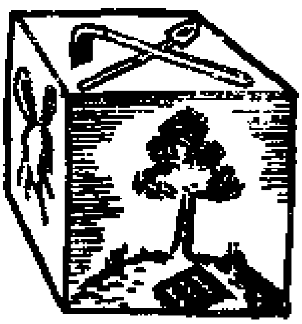
H. Weyl, «对称», 普林斯顿大学出版社.

12.5.5.6 二十面体群. 根据 12.5.3.3 和 12.4.5，该群共有 $12 \times 10 = 120$ 个元素．然而，它并不与对称群 $\mathfrak{S}_5$ 同构．为了看出这一点，我们看到，正十二面体的三十条棱决定十五条直线，即连结棱的中点与二十面体中心的直线．依照 12.5.5.1 的作法，它们



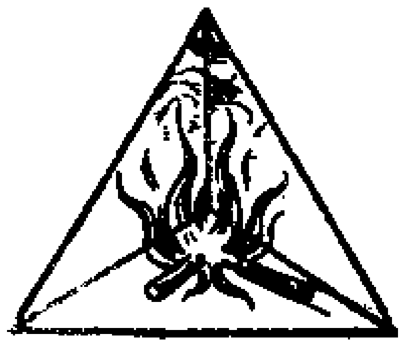
八面体

空气



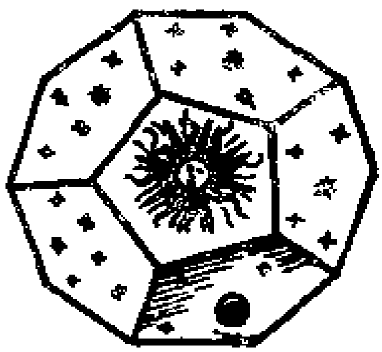
立方体

土



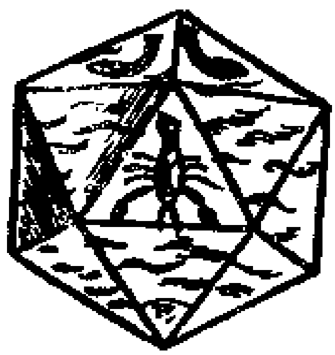
四面体

火



十二面体

宇宙



二十面体

水

图 12.5.5.8.

形成五个两两正交的直线三元组．于是很清楚，十二面体的位移群 G^+ 一意地作用在这五个三元组的集合上．由于它有 60 个元素，因此 $G^+ \cong \mathscr{A}_5$．相反地，由于原点的中心对称，G 并非一意地作用；实际上 $G \cong \mathfrak{S}_5$ 不成立，但是 G 与直积 $\mathscr{A}_5 \times \mathbf{Z}_2$ 同构．

12.5.5.7 附注．正十二面体或正二十面体，或具有它们的对称群的别的对象，都不是经常碰到的．在自然界，首先要注意到不

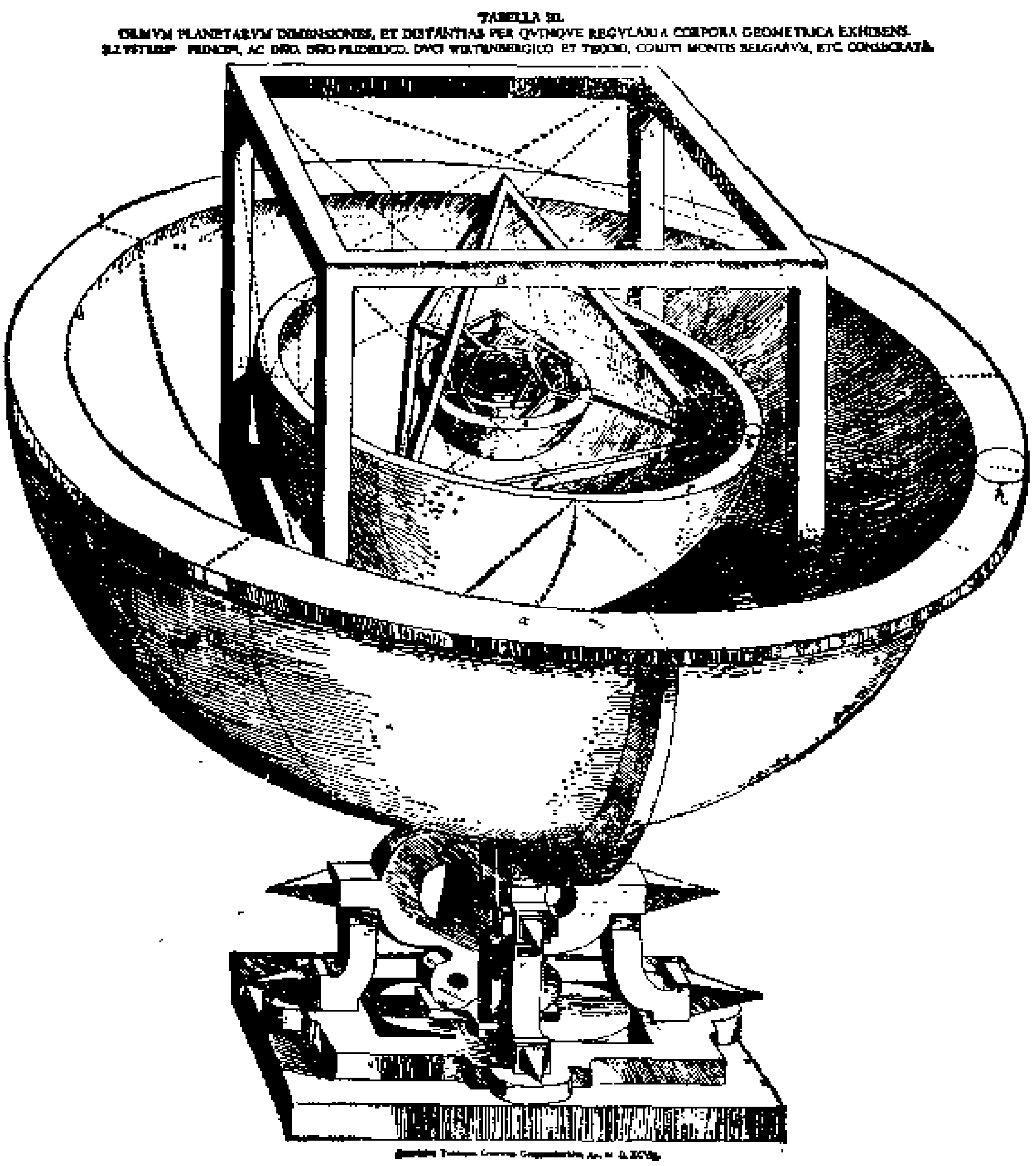


图 12.5.5.9．

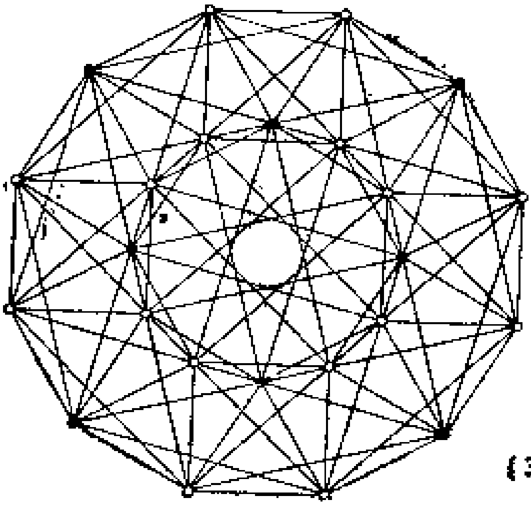
存在容有二十面体群的晶体。相反地，却存在某些容有此群的生物，参见图 12.5.5.7 和 [WL] 第 75 页。

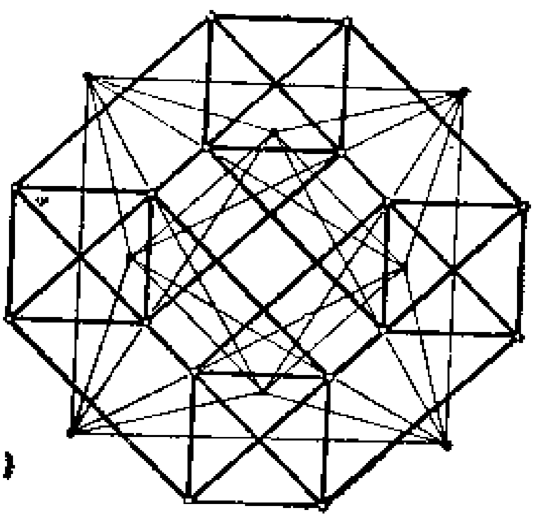
至于人类，我们已经发现了至少在公元前 500 年伊特鲁立亚文明时期的一块用块滑石制造的十二面体。我们也有古埃及托勒密王朝时代的一对二十面体，在伦敦的不列颠博物馆内可见到此物。希腊人关于五种正多面体作过哲理的探讨，除参阅柏拉图的著作《蒂迈欧篇》外，请参见 [CR 2] 第 13 页，[FT 2] 第 120—121 页和图 12.5.5.8。

此外，Képler 相信，在五种正多面体和太阳系行星轨道之间能找到一种联系：图 12.5.5.9。

12.5.6 四维空间中较难的例子。 我们通过对所有可能的正多胞形列表，来导出四维空间中的这些例子：参看 12.6.7.3。在这里，我们是把现成的表格一下子拿出来的，而在历史上，过程是更几何化，而且费了不少心血的，参看 [CR 2] 第 13 页和第 141 页。至于其中的名称，在 12.6.1 中将加以定义。

12.5.6.1 标准 {3, 4, 3}。 这是 $\mathbf{R}^4$ 中由 24 个顶点 (±2, 0, 0, 0), (0, ±2, 0, 0), (0, 0, ±2, 0,), (0, 0, 0, ±2), (±1, ±1, ±1, ±1) 定义的多胞形 P。这 24 个顶点也就是 Cub_4 的顶





{3,4,3}

Coxeter,《正多胞形》, Dover 出版社

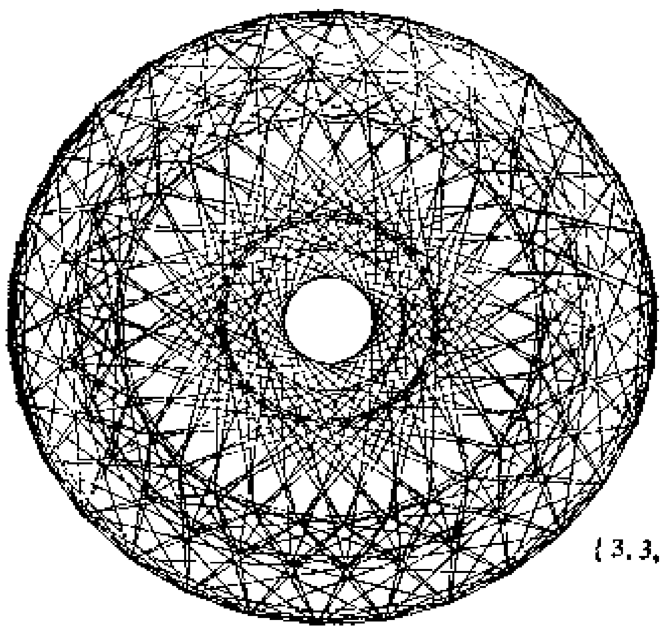
图 12.5.6.1。

点和位似比为 2 的 Coc_4 的顶点的并集。我们来证明它们定义了一个正多胞形。

顶点 $x=(2,0,0,0)$ 和八个顶点 $(1,\pm1,\pm1,\pm1)$ 的距离都为 2。于是，P 的全体含 x 的面的集合与这八个顶点定义的立方体的所有的面之间有一个双射；特别，群 $G(P)$ 在所有含 x 的旗上是可迁的；因此，只要说明群 $G(P)$ 在顶点上是可迁的。因为立方体 Cub_4 的群作用在 Cub_4 的顶点上，也作用在 Coc_4 的顶点上，所以只要说明 P 的一个等距把 $(2,0,0,0)$ 与 $(1,-1,-1,-1)$ 两点互换就够了。一个可供考虑的合适的对象是关于这两点的垂直平分面的对称（参见 9.7.5）。根据 8.2.10，这个对称为：

$$(x,y,z,t)\longmapsto\left(\frac{x-y-z-t}{2},\ \frac{-x+y-z-t}{2},\ \frac{-x-y+z-t}{2},\ \frac{-x-y-z+t}{2}\right),$$

可以看出，这个对称确实保持 P 的 24 个顶点不变。上述论证表明 $\operatorname{Et}P=Cub_3$；因此，根据 12.5.4.2 和 12.5.3.3，群 $G(P)$ 具有基数 $48\times24=1152$。



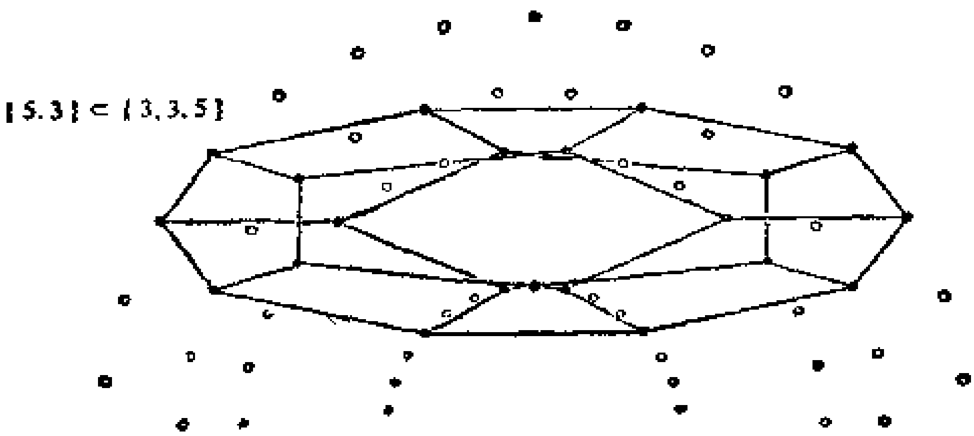
Coxeter，《正多胞形》，Dover 出版社

图 12.5.6.2。

12.5.6.2 标准 {3, 3, 5}. 它和它的对偶 {5, 3, 3}，是所有的正多胞形中最为复杂的。对于 12.5.5.4 中的 τ，它的 120 个顶点为：

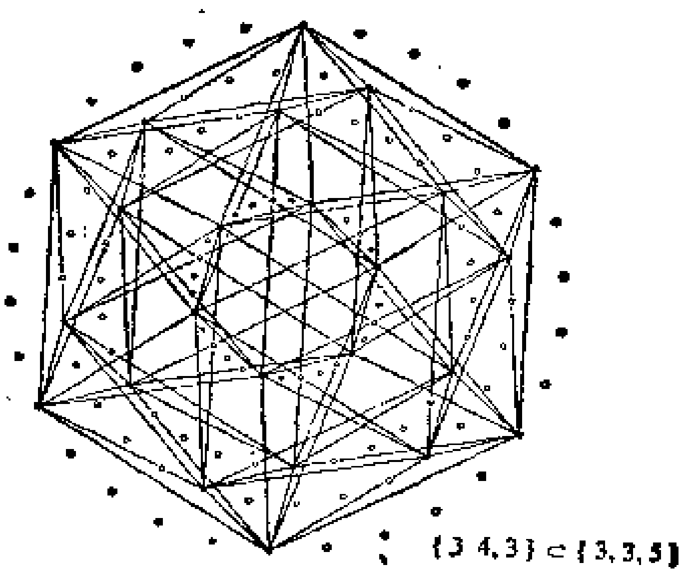
$$\begin{cases}\text{标准 }\{3, 4, 3\}\text{ 的 24 个顶点，以及八个点} \\ (\pm\tau, \pm 1, \pm\tau^{-1}, 0)\text{ 经坐标偶置换得出的所有的点.}\end{cases}$$

用 12.5.6.1 同样的方法，可证这个多胞形 Q 是正多胞形。过 $x=(2, 0, 0, 0)$ 的棱是以 x 为起点，以 12 个点 $(\tau, \pm 1, \pm\tau^{-1},$



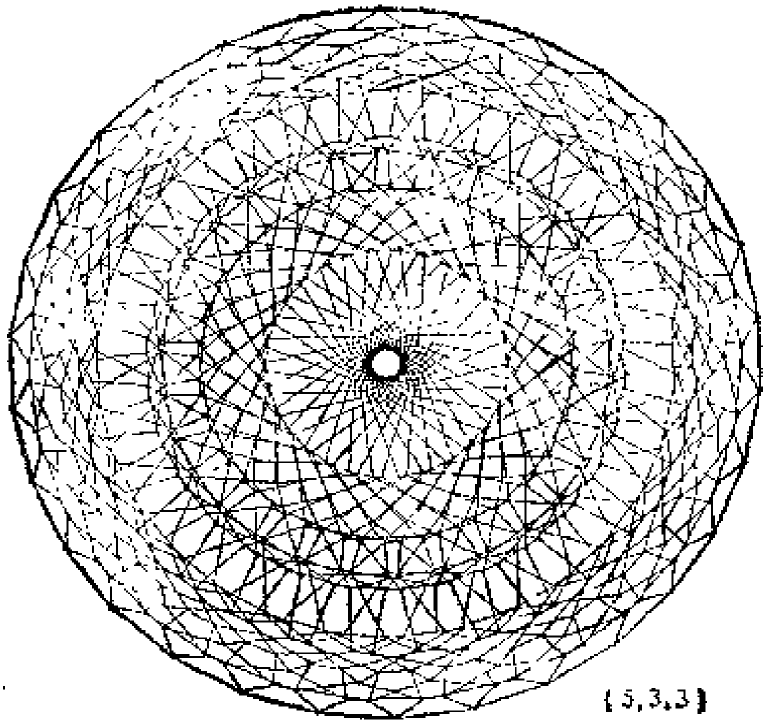
Coxeter,《正多胞形》，Dover 出版社

图 12.5.6.3.



Coxeter,《正多胞形》，Dover 出版社

图 12.5.6.4.



Dover 出版社

图 12.5.6.5.

0)、$(\tau, 0, \pm 1, \pm \tau^{-1})$，$(\tau, \pm \tau^{-1}, 0, \pm 1)$ 为终点的线段. 这 12 个点构成一个正二十面体，参见 12.5.5.3. 这个二十面体的群可通过恒等变换延拓到轴 $(1, 0, 0, 0)$ 上，此群在 Q 的含 x 的旗上是可迁的；此外，它保持 Q 不变. 应该考察 l 的第一个坐标固定的那些顶点；对 τ 或 $-\tau$ 的情形，这一点已经做过了. 当第一个坐标为 $+1$ 时，我们看到顶点为 $(1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$，$(1, \pm \tau, 0, \pm\tau^{-1})$，$(1, 0, \pm \tau^{-1}, \pm \tau)$，$(1, \pm \tau^{-1}, \pm \tau, 0)$，因为它们形成一个十二面体，故容有二十面体的等距：参见 12.5.5.5.

最后，当第一个坐标为 0 时，我们看到顶点为 $(0, \pm 2, 0, 0)$，$(0, 0, \pm 2, 0)$，$(0, 0, 0, \pm 2)$，$(0, \pm\tau, 1, \pm\tau^{-1})$，$(0, 1, \pm\tau^{-1}, \pm\tau)$，$(0, \pm\tau^{-1}, \pm\tau, 1)$；这些都是二十面体棱的中点，是通过位似比为 $2\tau^{-1}$ 的位似变换从 12.5.5.3 得到的. 于是，这些点的集合关于十二面体——二十面体群是稳定的.

还须说明 $G(Q)$ 在顶点上是可迁的，其做法与 12.5.6 中相同. 根据 12.5.5，群 Q 的阶数是 $120 \times 120 = 14400$.

12.6 正多胞形：分类

我们要证明：除我们已遇到的正多胞形外，没有别的正多胞形了。此结论是 1850 年左右由 Schläfli 得出的。证明建立在两点想法上：首先是引入正多胞形的符号，其次是得出公式 12.6.5，用以进行归纳法分类。

12.6.1 定义. 设 P 是一个 d 维正多胞形。所谓 P 的符号，记作 $\{r_1(P), r_2(P), \cdots, r_{d-1}(P)\}$，是指用归纳法定义如下的 $d-1$ 个整数的序列：$r_1(P)$ 是 P 的二维面的边数（参见 12.5.2.2 和 12.4.2)，而 $\{r_2(P), \cdots, r_{d-1}(P)\}$ 是 Et (P)（参见 12.5.3.2）的符号。

12.6.2 例子

12.6.2.1 我们注意到，所有的 $r_i \geq 3$.

12.6.2.2 P 的一个面的符号是 $\{r_1(P), \cdots, r_{d-2}(P)\}$，可从 12.5.3.1 看出这一点。

12.6.2.3 Simp_d 的符号是 $\{3, 3, \cdots, 3\}$. Cub_d 的符号是 $\{4, 3, \cdots, 3\}$. Coc_d 的符号是 $\{3, \cdots, 3, 4\}$. 正二十面体的符号是 $\{3, 5\}$. 正十二面体的符号是 $\{5, 3\}$. 例 12.5.6.1 和例 12.5.6.2 的符号分别为 $\{3, 4, 3\}$ 和 $\{3, 3, 5\}$.

为了说明上述结论，只要验证（这是容易的）r_1 是所给出的那些数就行了，因为所有这些多面体的星形集都已在 12.5.4.1; 12.5.4.2; 12.5.4.3; 12.5.6.1; 12.5.6.2 中被确定；利用归纳法，即可得出所有给定的符号。

12.6.2.4 P 的对偶多胞形 P^*（参见 12.5.2.4）的符号是 $\{r_{d-1}(P), \cdots, r_1(P)\}$. 从符号的定义以及 12.1.10 和 12.6.2.2 可得到此结论。例如，标准 $\{3, 3, 5\}$ 的对偶多胞形是符号为 $\{5, 3, 3\}$ 的一个正多胞形。

12.6.3 基本关系式

12.6.4 记号. 对于一个正多胞形 P，其棱的公共长度记作 l，外

接球的半径记作 r（参见 12.5.2.1），并令 $\rho(P)=\frac{l^2}{4r^2}$。 则当 P 具有符号 $\{r_1,\cdots,r_{d-1}\}$ 时，在 $\rho(P)$ 和 $\rho(\mathrm{Et}P)$ 之间有关系式：

12.6.5

$$\rho(P)=1-\frac{\cos^2\pi/r_1}{\rho(\mathrm{Et}\,P)}.$$

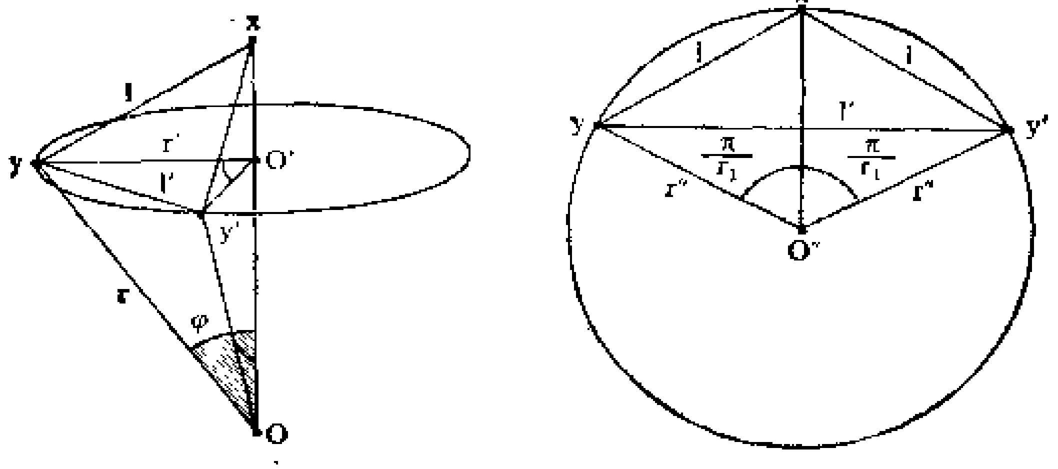


图 12.6.5.

为了证明 12.6.5，取一个顶点 $x\in P$。 设 O 是 P 的中心，O' 是 $\mathrm{Et}_x P$ 的中心。 设 r 是 P 的外接球的半径，r' 是 $\mathrm{Et}_x P$ 的外接球的半径。又设 y，y' 是 $\mathrm{Et}\,P$ 的一条棱的端点，并且 $l'=yy'$ 是 $\mathrm{Et}_x P$ 的棱的公共长度。 则 y，x，y' 是 P 的一个二维面上相邻的三个顶点（根据 12.5.3.1），而这个二维面是一个有 r_1 条边的正多边形；根据 12.4.3，如果 r'' 表示这个二维面上以 O'' 为中心的外接圆的半径，则有

$$l=yx=xy'=2r''\sin\pi/r_1,\quad l'=2r''\sin 2\pi/r_1.$$

由此得出 $l'=2l\cos\frac{\pi}{r_1}$。 因为

$$\rho(P)=\frac{l^2}{4r^2},\quad \rho(\mathrm{Et}P)=\rho(\mathrm{Et}_x P)=\frac{l'^2}{4r'^2}.$$

而且当 2φ 表示三角形 $\{y,O,x\}$ 在 O 点的角度时，有

$$r'=l\cos\varphi,\quad l=2r\sin\varphi,$$

所以可推得

$$\rho(P)=\sin^2\varphi,\ \rho(\mathrm{Et}\,P)=\frac{4l^2\cos^2\dfrac{\pi}{r_1}}{4l^2\cos^2\varphi}=\frac{\cos^2\dfrac{\pi}{r_1}}{\cos^2\varphi},$$

由此即可证得 12.6.5。

12.6.6 推论. 数 $\rho(P)$ 只依赖于 $d-1$ 元组 $\{r_1,\cdots,r_{d-1}\}$；我们把它记作 $\rho(r_1,\cdots,r_{d-1})$，每当一个正多胞形的符号为 $\{r_1,\cdots,r_{d-1}\}$ 时，我们有关系式：

$$\boxed{\rho(r_1,\cdots,r_{d-1})=1-\frac{\cos^2\dfrac{\pi}{r_1}}{\rho(r_2,\cdots,r_{d-1})}.}$$

事实上，把 12.6.5 的推导相继应用于 Et P，Et (Et P)，……即可得证。

12.6.7 定理 (Schläfli, 1850). 对于一个正多胞形，它所有可能取的符号可用下表给出：

$d=2$：$\{n\}$，n 是 $\geqslant 3$ 的任意整数；

$d=3$：$\{3,3\}$，$\{3,4\}$，$\{4,3\}$，$\{3,5\}$，$\{5,3\}$；

$d=4$：$\{3,3,3\}$，$\{3,3,4\}$，$\{4,3,3\}$，$\{3,4,3\}$，$\{3,3,5\}$，$\{5,3,3\}$；

$d\geqslant 5$：$\{3,\cdots,3\}$，$\{3,\cdots,3,4\}$，$\{4,3,\cdots,3\}$。

对应于此表中每一个符号，存在一个正多胞形，以它作为符号。两个具有相同符号的正多胞形是相似的。

12.6.7.1 从 12.4.2，12.6.2.3 和 12.6.2.4 可得存在性。

12.6.7.2 唯一性（不计相似差别）可用归纳法证明。设 P，P' 是两个具有相同符号的正多胞形；由归纳法假设和 12.6.2.2 可知，P 和 P' 的面是相似的。通过一个适当的相似，我们可假设它们是等距的，从而可使 P 和 P' 的两个面重合，并让 P，P' 位于由此面 F 所决定的同一个半空间内。

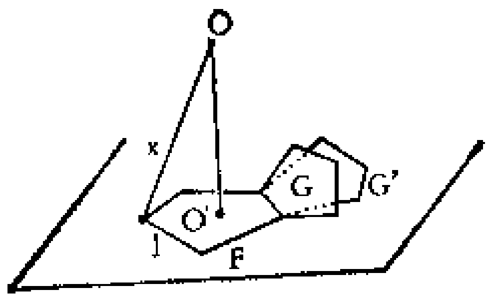


图 12.6.7.1.

而这时，P，P' 具有相同的中心 O；事实上，这个中心必然在过面 F 的中心 O'、垂直于 F 的超平面的垂线上，并且中心 O 与 F 的一个顶点的距离为 r，r 则由下式给出：

$$\rho(P)=\rho(P')=\frac{l^2}{4r^2}$$

（参见 12.6.4 和 12.6.6），这里 l 是 F 的一条棱的长度．设 A 是 F 的一个 $(d-2)$ 维面，G，G' 是 P，P' 沿 A 相邻的两个面（参见 12.1.12）；如果 $H=\langle O,A\rangle$ 是过 O 和 A 的超平面，则从 12.5.2.3 可得 $\sigma_H(F)=G$ 和 $\sigma_H(F)=G'$，故 $G=G'$．用归纳法和 12.1.13 即证得 $P=P'$．

12.6.7.3 用归纳法，再考虑到基本关系式 12.6.6 中一切可能性，即可列出可取符号表．其中关键在于：由于 $r_1\geqslant 3$（参见 12.6.2.1）．所以只要 $\rho(r_2,\cdots,r_{d-1})\leqslant\frac{1}{4}$，则因 $\cos^2\frac{\pi}{r_1}\leqslant\frac{1}{4}$ 和 $\rho(r_1,\cdots,r_{d-1})>0$，就不存在取 $\rho(r_2,\cdots,r_{d-1})$ 的可能性了．从而可知，对于每一步只有有限多个试验可做．

这样就导出了表中一系列数据，唯一还要证明的只是最后一列中的值 $\frac{d+1}{2}$ 和 $\frac{1}{d}$，这可用归纳法证明．

12.6.8 一个有启示意义的概括． 于是我们看到，低维正多胞形比高维的来得多；总的来说，多胞形一般只分三组，但三维与四维的情形，以及二维时有无穷多种正多边形的情形都是例外．这个结论可以作为下面那句富有哲理的格言（Thom 语）的一个方面的例证："丰富的结构大多数是低维的，而贫乏的结构大多数是高维的"．下面是这个原则的另外一些例证，其中有一些也许是读者很熟悉的．

丰富的结构：

——单李群（[SE 3]，集合）．

——可除代数（[KH]，第 249 页）．

——二次型域（[SU]；[B-S] 第 167 页和 342—355 页）．

$d=2$		$d=3$		$d=4$		$d\geqslant 5$	
符号	$\rho(\cdot)$	符号	$\rho(\cdot)$	符号	$\rho(\cdot)$	符号	$\rho(\cdot)$
						$\{3,\cdots,3\}$	$\frac{d+1}{2d}\Longrightarrow\{$
				$\{3,3,3\}$	$\frac{5}{8}\Longrightarrow$		
						$\{4,3,\cdots,3\}$	$\frac{1}{d}<\frac{1}{4}$
		$\{3,3\}$	$\frac{2}{3}\Longrightarrow$	$\{4,3,3\}$	$\frac{1}{4}$		
				$\{5,3,3\}$	$\frac{1}{16}(7-3\sqrt{5})<\frac{1}{4}$		
$\{3\}$	$\frac{3}{4}\Longrightarrow$	$\{4,3\}$	$\frac{1}{3}\Longrightarrow$	$\{3,4,3\}$	$\frac{1}{4}$		
		$\{5,3\}$	$\frac{1}{6}(3-\sqrt{5})<\frac{1}{4}$				
$\{4\}$	$\frac{1}{2}\Longrightarrow$	$\{3,4\}$	$\frac{1}{2}\Longrightarrow$	$\{3,3,4\}$	$\frac{1}{2}\Longrightarrow$	$\{3,\cdots,3,4\}$	$\frac{1}{2}\Longrightarrow$
$\{5\}$	$\frac{1}{8}(5-\sqrt{5})\Longrightarrow$	$\{3,5\}$	$\frac{1}{10}(5-\sqrt{5})\Longrightarrow$	$\{3,3,5\}$	$\frac{1}{8}(3-\sqrt{5})<\frac{1}{4}$		
$\{n\}(n\geqslant 6)$	$\sin^2\frac{\pi}{n}\leqslant\frac{1}{4}$						

表 12.6.7.4.

——正交群的非单性(参见 8.9.10)。

——二维负常曲率的紧结构的可变形性 ([MW 1] 和 [MW 2])。

——$n \leqslant 4$ 时对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的可分解性 ([SW] 第 13 章);

贫乏的结构:

——拓扑向量空间(有限维的,它们都是同胚的)。

——有限域是可换的并已知道得很清楚 ([SE 2] 第 1 章)。

——可微映射的一般奇性随维数增加而变得复杂 ([MR])。

12.6.9 一个从文化角度提出的附注. 尽管它们看上去是纯几何的,并且相当专门化,但是,正多胞形就它们的等距群而言,是属于重要的数学结构之列的;它们的群是"经反射生成的",这里,用的是超平面对称. 而这种类型的有限群也是能完全进行分类的. 它们在李群 (Weyl 群) 和代数群的研究中起着重要的作用. 关于这方面的一般理论,参看 [BI 4]. 也可看 [CR 2] 第 11 章. 由此一般理论可得到正多胞形的一种分类,也可参看 1.8.7.

12.6.10 附注

12.6.10.1 在 [CR 2] 中,我们可找到关于正多胞形最多的内容,其中有很完整的历史的讨论.

12.6.10.2 为了研究 {3, 4, 3} 和 {3, 3, 5} 以及它们的群,都得借助于四元数(在三维和四维的情形,这是不足为怪的,参见 8.9)。一本很好的参考书是 [VL]。

12.6.10.3 由于二十面体群是与 $\mathscr{A}_5$ 同构的(参见 12.5.5.6),根据 Galois 理论,这就表明了在二十面体和一般五次方程之间是有联系的. 有关这方面内容,[KN 1] 是一本历史上的名著. 近代的文献可看 [SW] 第 148—149 页。

12.6.10.4 有了公式 12.6.6,我们也就有可能利用正多胞形对欧几里得空间的正则铺嵌进行分类了. 我们知道,二维的铺嵌用的是等边三角形、正方形和正六边形. 对于三维(或任意 d 维),可利用立方体. 但还有没有其它的可能呢? 答案是: 符号为 $\{r_1, \cdots, r_{d-1}\}$ 的正多胞形能铺嵌一个 d 维空间当且仅当存在一

个符号为 $\{r_2,\cdots,r_d\}$ 的正多胞形，使得 $\rho(r_1,r_2,\cdots,r_{d-1},r_d)=0$；这个符号为 $\{r_2,\cdots,r_d\}$ 的多胞形对应于正则铺嵌的"星形集"。容易看出，根据表 12.6.7.3，除去已经遇到的对应于符号为

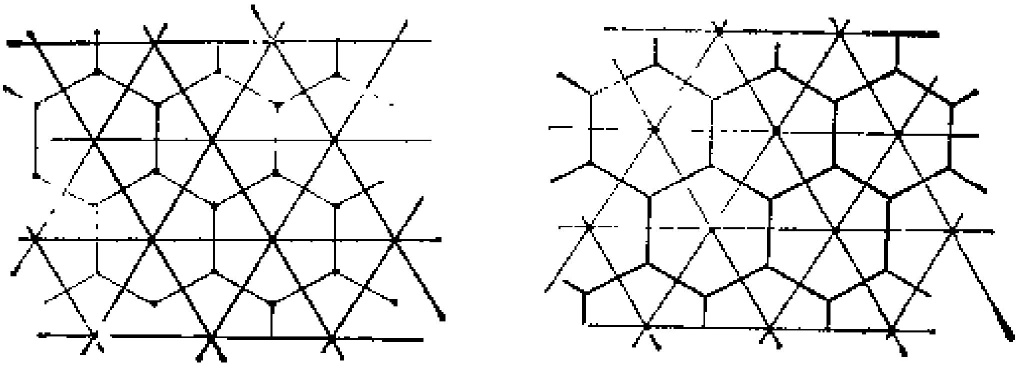
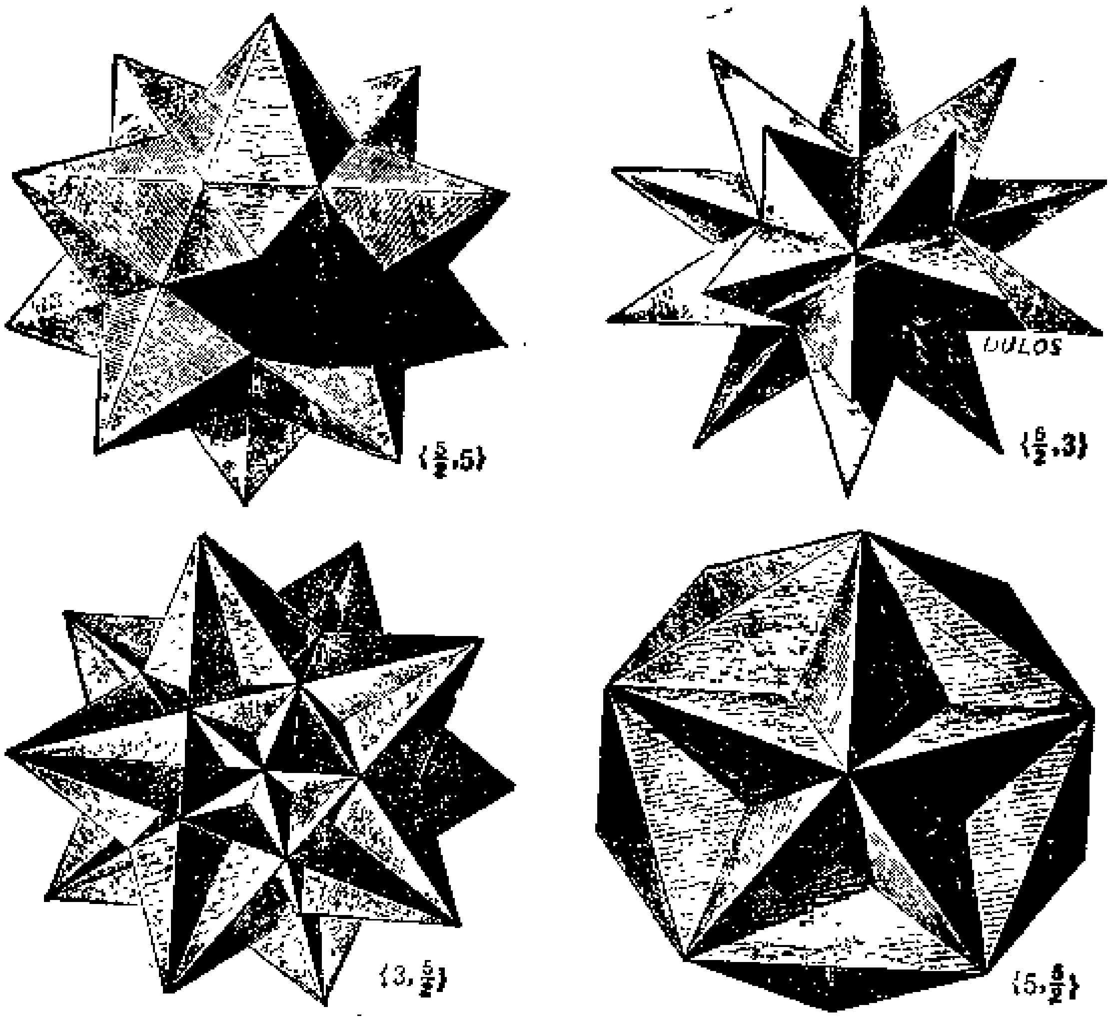


图 12.6.10.



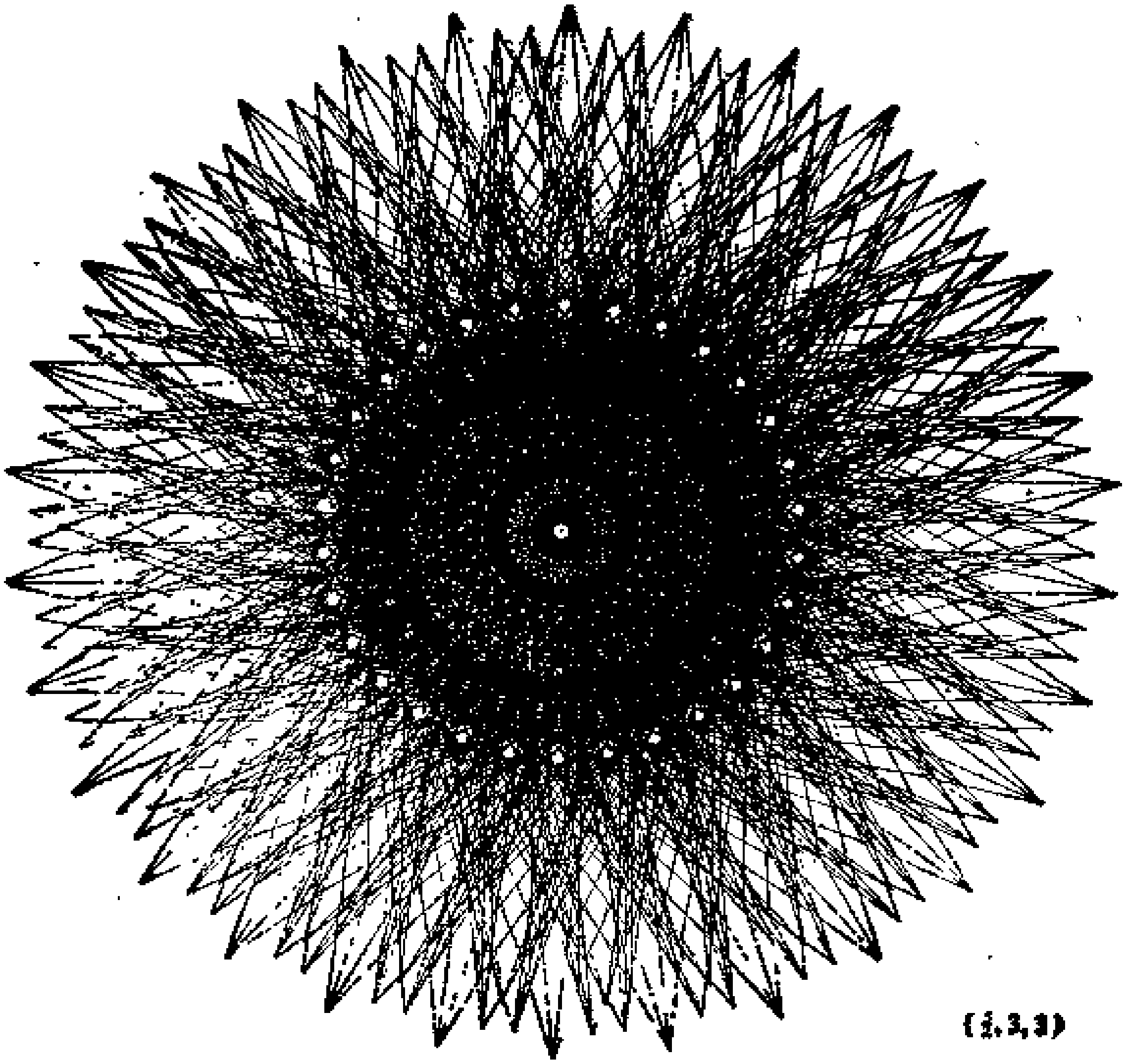
Rouché 和 de Comberousse,《几何论著》Gauthier-Villars 出版社.

图 12.6.10.5.

{3, 6}, {4, 4}, {6, 3}, …, {4, 3, …, 3, 4} 的情形外，只存在两个符号分别为 {3, 4, 3, 3}, {3, 3, 4, 3} 的正则铺嵌；它们一个用 Coc_4，另一个用 {3, 4, 3} 铺嵌四维空间（它们是互为对偶的，正象 {3, 6} 和 {6, 3} 一样，对偶性在于取的是铺嵌中心）。

12.6.10.5 存在非凸的正多面体，称为星形多面体；它们是我们所熟知的（看 [CR 2]，第 14 章）。图 12.6.10.5 是在三维空间中的四个星形多面体。

这四个多面体都容有一个与十二面体相同的等距群。在四维空间中，存在十个星形正多面体，图 12.6.10.6 和图 12.6.10.7 是其

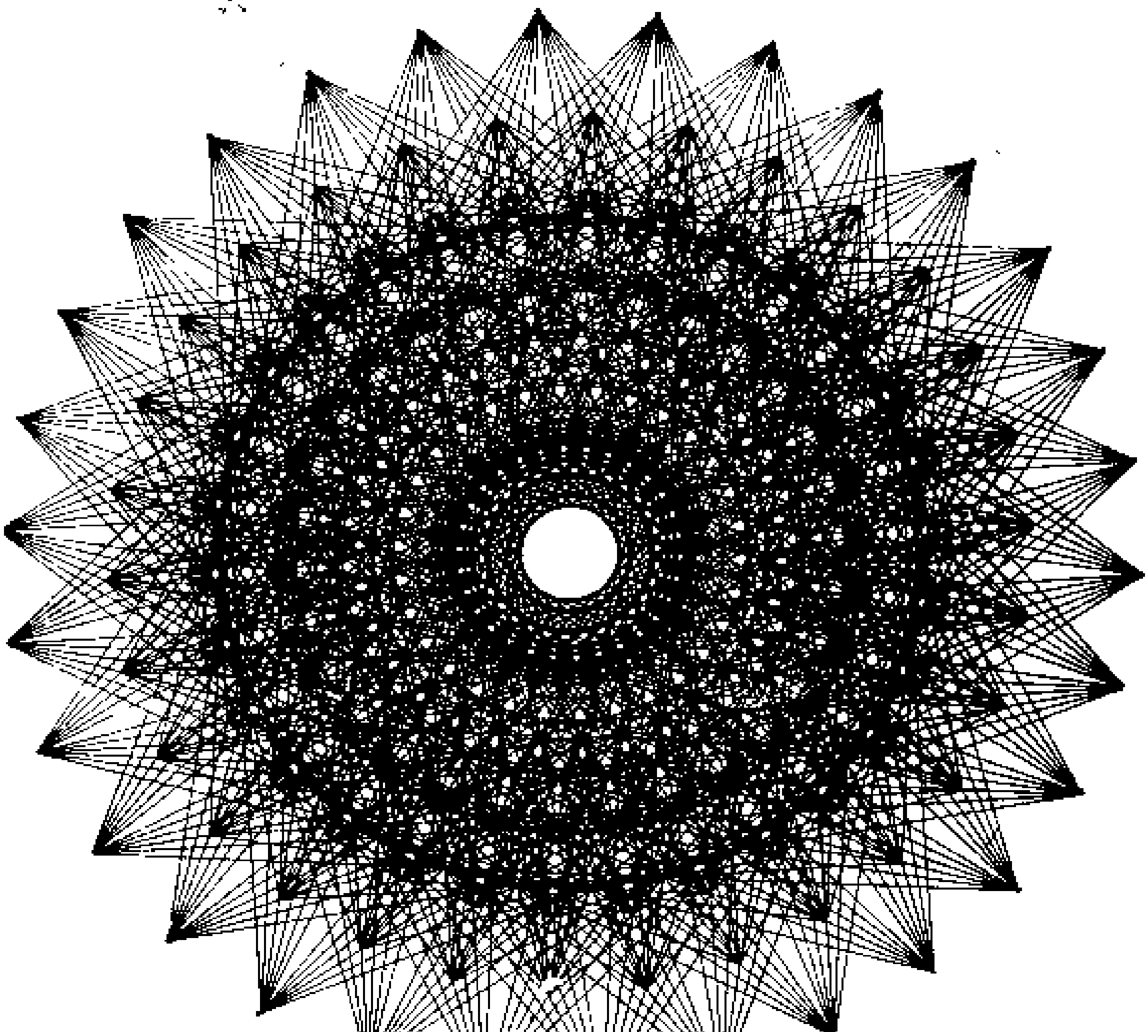


{5/2,3,3}

Coxeter，《正则复多胞形》，剑桥大学出版社。

图 12.6.10.6.

中的两个．这十个星形正多面体都容有一个与正多胞形{3,3,5}的含 14400 个元素的群相同的等距群．在图 12.6.10.5，12.6.10.6，12.6.10.7 中，我们在一个星形正多面体旁边标出了 Schläfli 符号；它们是有理数，而未必是整数了．至于 n 个顶点的星形正多边形的情形，留给读者去加以分类，最后，从五维开始，就不再有星形正多面体了．



Coxeter，《正则复多胞形》，剑桥大学出版社．

图 12.6.10.7.

12.7 Euler 公式

在本节中，X 是一个三维仿射空间(除本节的最后部分外)．仅

在 12.7.3.1 和 12.7.3.2 的证明中，须赋予 X 一个欧几里得结构。

12.7.1 记号. 对于一个多胞形，引入下述记号：

$\Xi = P$ 的棱所成的集合，$\alpha = \# \Xi$，

$\Sigma_i = P$ 中属于 i 个面的顶点所成的集合，$\sigma_i = \# \Sigma_i$，

$\Sigma = P$ 的全体顶点所成的集合，$\sigma = \# \Sigma$，

$\Phi_i = P$ 中有 i 条边的面所成的集合，$\varphi_i = \# \Phi_i$，

$\Phi = P$ 的全体面所成的集合，$\varphi = \# \Phi$.

根据 12.1.12，我们所考虑的 $i \geqslant 3$，且有

12.7.2 $$\boxed{\sigma = \sum_i \sigma_i, \ \varphi = \sum_i \varphi_i, \ 2\alpha = \sum_i i\sigma_i = \sum_i i\varphi_i.}$$

假如读者对图形 1.8.4.2 到 1.8.4.6 和对图形 12.1.1.4, 12.1.1.5 计算 σ, α, φ，则每次均可发现 $\sigma - \alpha + \varphi = 2$。实际上，我们有：

12.7.3 定理（Euler 公式）. 对三维仿射空间的任一多胞形，恒有 $\sigma - \alpha + \varphi = 2$。

我们给出这个公式的两种证明. 第一种证法"干净利落"而且有趣，但它要用到球面三角形面积的 Girard 公式，这一点不太方便。第二种证法模仿第一种，但只用到一个三角形角度等于 π 这一事实. 也可参看 12.7.5.3。

12.7.3.1 第一种证法. 任取一点 $O \in \mathring{P}$，并设 $S = S(0, 1)$ 是 X 的单位球面. 从 O 出发把 P 的边界投影到 S 上，亦即考虑映射 p: $\operatorname{Fr} P \ni x \longmapsto \dfrac{x}{\|x\|} \in S$. P 的顶点成为 S 的点，P 的棱成为 S 的大圆弧，而 P 的面成为 S 的球面多边形(关于球面的概念，看 18 章)。因为 P 是凸的，并且 $O \in \mathring{P}$，故可推出：多边形实际上把 P 分割成两部分(参见 12.1.5)；因而得出：所得出的球面多边形是凸的，并且有 i 条边的球面三角形的个数为 φ_i；每一条棱是两个不同面的公共棱，并且棱数为 α；属于 i 个面的顶点数为 σ_i，并且每一条棱含两个顶点(参见 12.1.12)。

证明思路是，对如此获得的凸多边形的所有角求和，首先，对同一个顶点的角度求和一次，再对同一个面上的角度求和一次。

因为 $p(\mathrm{Fr}\,P)=S$，且凸多边形不会出现重叠部分，故在一个顶点处的所有角度之和必等于 2π，因此：

$$\text{各角之和}=\sum_{s\in\Sigma}2\pi=2\pi\sigma.$$

应用 18.3.8.5，可得：

$$\text{各角之和}=\sum_{F\in\Phi}(F\text{ 的角度之和})=\sum_i\sum_{F\in\Phi_i}[F\text{ 的面积}+(i-2)\pi]=\sum_{F\in\Phi}F\text{ 的面积}+\sum_i(i-2)\pi\varphi_i=4\pi+\pi\Big(\sum_i i\varphi_i\Big)-2\pi\sum_i\varphi_i=4\pi+2\alpha\pi-2\pi\varphi.$$

因为 $p(\mathrm{Fr}\,P)=S$，故利用 12.7.2 可由这两个求和等式推得 $\sigma-\alpha+\varphi=2$。

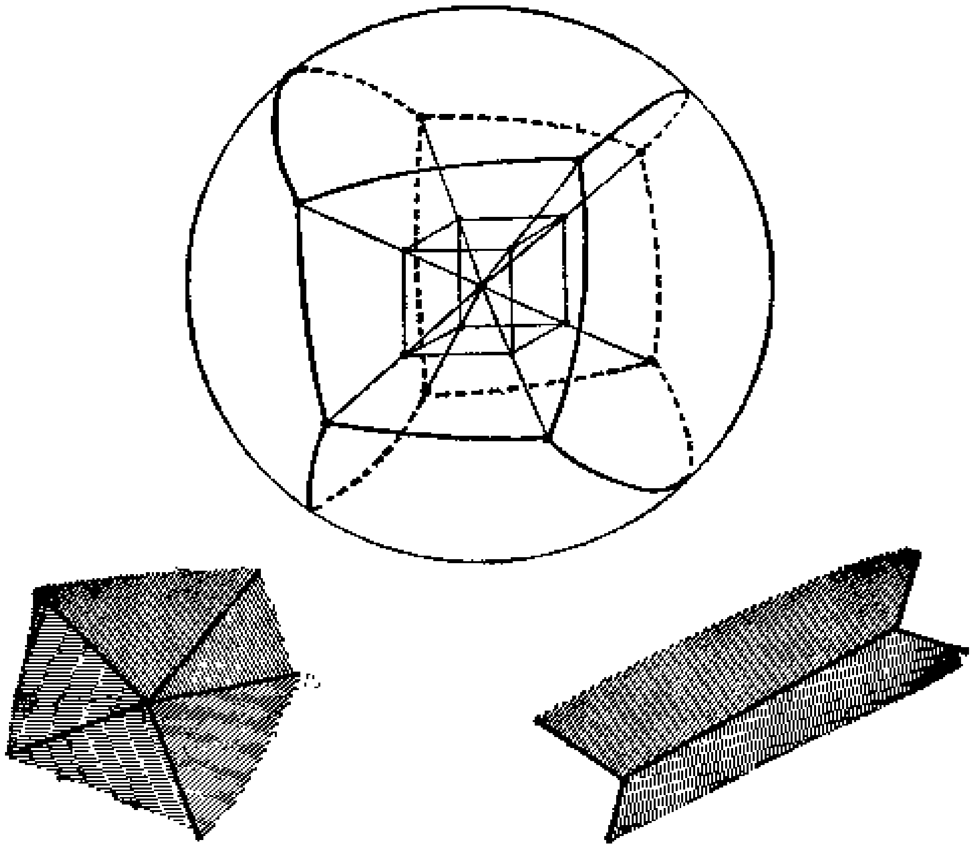


图 12.7.3.1.

12.7.3.2 第二种证法. 我们想在一个平面上进行讨论；证明的思路是在 P 上挖去一个面，从挖的面附近的一点作球极投影；然

后，在平面上如前一样作类似的计算，只要区分内部的顶点和边界上的顶点就行了。

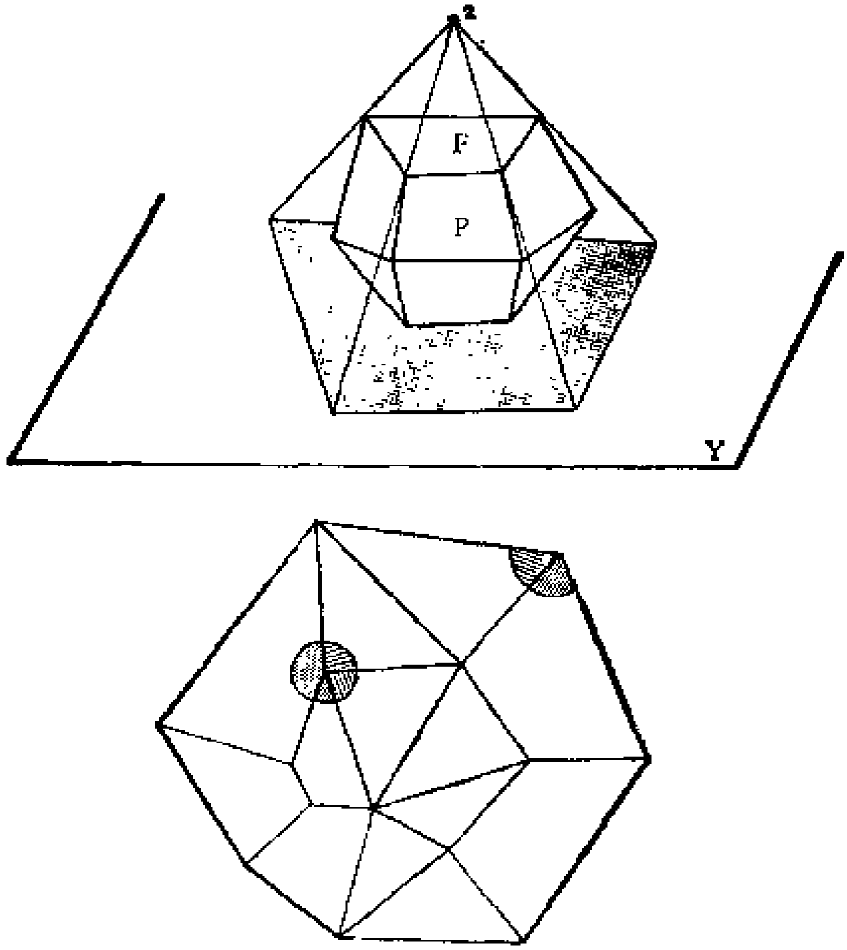


图 12.7.3.2.

设 $P=\bigcap\limits_{i=1}^{s} R_i$（参见 12.1.6），$F=F_1$，$a\in\bigcap\limits_{i\geqslant 2}\mathring{R}_i\setminus P$，$Y$ 是与 F 平行的一个平面，且使 Y 和点 a 位于由 F 决定的两个不同的半空间内。则如下定义的以 a 为中心、到 Y 上的投影：

$$p:\ x\longmapsto\langle a,x\rangle\cap Y.$$

在 P 的所有顶点、棱和除 F 外的面与 Y 上的点、线段和凸多边形的集合之间定义了一个双射，其中的凸多边形具有下述性质：它们是由一个大的凸多边形（即 $p(F_1)$）分解而得的，并且仅在顶点处或沿着边两两相交。称 σ' 为顶点个数。有内顶点和外顶点，总数

等于 $p(F_1)$ 的边数。于是，根据 10.5.2，所考虑的多边形的各角之和为

各角之和 $= 2\pi(\sigma'-k)+(k-2)\pi=\pi(2\sigma'-k-2)$，这是因为，在一个内顶点处的各角之和为 2π，在外顶点则等于 $p(F_1)$ 在此点的角度。

将所考虑的具有 i 条边的多边形的个数，记为 φ'_i，它们的总数记为 φ'；仍根据 10.5.2，有

$$\text{各角之和} = \sum_i (i-2)\pi\varphi'_i = \pi[i\varphi'_i - 2\varphi'].$$

这里，由于边界的缘故，$\sum_i i\varphi_i$ 不等于边数 α'，而仅等于 $2\alpha'-k$。

由此得出 $2\sigma'-k-2=2\alpha'-k-2\varphi'$，即 $\sigma'-\alpha'-\varphi'=1$。而 $\sigma=\sigma'$，$\alpha=\alpha'$，$\varphi=\varphi'+1$。

12.7.4 一个应用. 由欧拉公式可推得 12.8.6 中的 Cauchy 定理；但下面我们看到，欧拉公式还提供了另一个方法，把三维空间中所有可能的正多胞形列成表格。

12.7.4.1 命题. 在一个三维仿射空间中，设 P 是一个多胞形，使得每一个顶点属于 r 个面，每一个面具有 s 个顶点，其中 r，s 为常数，则序对 $\{r, s\}$ 只能取五个值 $\{3, 3\}$，$\{3, 4\}$，$\{3, 5\}$，$\{4, 3\}$，$\{5, 3\}$。

事实上，从 12.7.2 推出 $2\alpha=r\varphi=s\sigma$，因此，从 12.7.3 有

$$\boxed{\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}.}$$

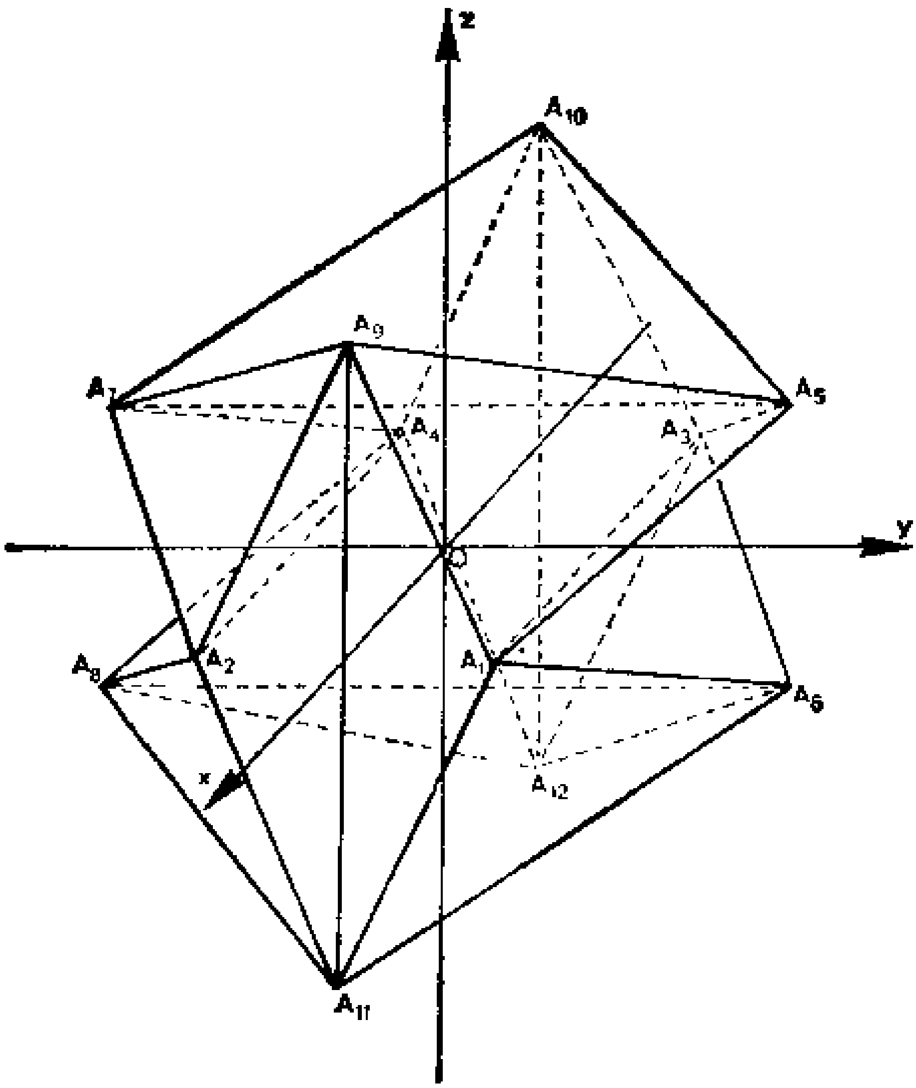
整数 $r, s\geqslant 3$. 由于 $\alpha>0$，故 $r\geqslant 4$ 且 $s\geqslant 4$ 已不可能。于是，我们可得到下面列出的表格。

12.7.4.2 附注. 上式还对每一种情形给定了 σ，α，φ 的数目. 值得注意的是，这些多面体的存在性是平凡的，作出图形即可证明，根本不需要用到 12.5.5. 因此，综上所述，对于五种情形中的每一种，存在唯一的一个多胞形；

$\{r, s\}$	$\{3, 3\}$	$\{3, 4\}$	$\{4, 3\}$	$\{3, 5\}$	$\{5, 3\}$
σ	4	8	6	20	12
α	6	12	12	30	30
φ	4	6	8	12	20

12.7.5 附注

12.7.5.1 六嘴 Shaddock. 12.7.3.1 的证明方法表明，对于不一定是凸的，但是 11.1.2.4 意义下的星形多面体的紧多面体，Euler 公式也是成立的。我们利用这一事实，向读者指出一种危



Adrien Douady、APMEP 通报，第 281 期。

图 12.7.5.1.

险：不要以为这样一个非凸的，但在点 $O\in\mathring{P}$ 处为星形的多面体 P 在把每一个顶点沿连接它和 O 点的半直线上作适当的移动之后，就能变成一个凸多面体。一般来说这是不可能的；在 [DY] 中说明了这一点。同时，读者还能在该书中找到一个反例和它在代数几何中的一个应用。这个反例就是图 12.7.5.1 中的"六嘴 Shaddock"。也可看 [LP] 第 35 页。

12.7.5.2 12.7.3.1 的，甚至 12.7.3.2 的证明，都仅是关于二维紧黎曼流形的 Gauss-Bonnet 公式证明的一种特殊情形。在 12.7.3.1 中，流形是具有常曲率 1 的球面，在 12.7.3.2 中，它是带有边界的一个平面，其曲率为 0。有关这一推广，例如可看 [KG1] 第 112 页或 [SB] 第 290 页，也可看 18.3.8.6 和 19.5.4。

12.7.5.3 12.7.3.1 和 12.7.3.2 的证明想必不会使读者完全感到满意。事实上，这结果是仿射的，并且引入的欧几里得结构不是对象所固有的。实际上，该结果在比仿射更一般的情况也对，它是"单形的"，只涉及顶点、棱、面以及它们的附属关系。

事实上，确有一个这样的结果，但凸性被所谓"单连通"的条件代替，否则，结论一般不成立，请看下文。目前，单连通最常用的定义是基本群为零，即任意一条闭道路可收缩成一点；从前，在二维多面体的情形下，单连通则是指一条简单闭道路把多面体分割成为两个不同的连通分支。读者在 [VN] 第 19—27 页上可找到借助于单连通这个定义对 $\sigma-\alpha+\varphi=2$ 的证明。读者也应看到，单连通的这两种定义是等价的。上面提到的这些事实的证明属代数拓扑内容，已超出本书的范围。

12.7.5.4 对于任意一个多面体，在 12.1.3 的意义下，一般说公式是不成立的。我们把 γ 个多面体如图 12.1.3.1 那样连结起来，得到有如 12.7.5.4 的图形和下述表格，表中给出了 σ，α，φ 和 $\sigma-\alpha+\varphi$。

因此，添上凸集这个条件后，我们就得到了值 $2(1-\gamma)$，这里 $\gamma=0,1,2,\cdots$。我们确实能够证明，对于任意一个上述意义下的多面体 P，或者换句话说，对任意一个嵌入在 $\mathbf{R}^3$ 内的曲面，

γ	σ	α	φ	$\sigma-\alpha+\varphi$
1	12	24	12	0
2	20	44	22	-2
γ	$12\gamma-4(\gamma-1)$	$24\gamma-4(\gamma-1)$	$12\gamma-2(\gamma-1)$	$2(1-\gamma)$

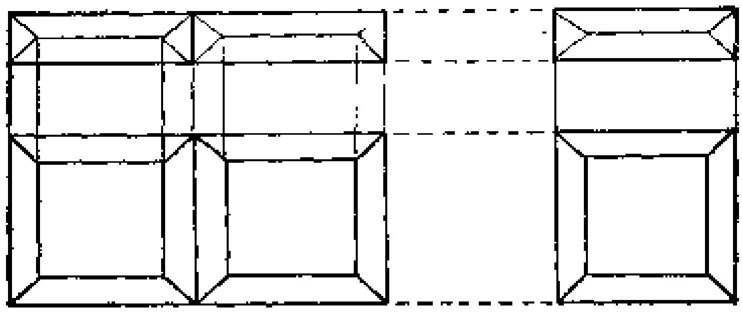


图 12.7.5.4.

$\sigma-\alpha+\varphi$ 的值总等于 $2(1-\gamma)$。数 γ 是 P 关于形变的不变量；我们可以证明，对应于这个数 γ，任意一个多面体都同胚于图 12.7.5.4 中的多面体，于是，我们可以把 γ 称为 P 的洞数，并称 $\sigma-\alpha+\varphi$ 为 P 的 Euler-Poincaré 示性数。对于这些问题的介绍，可选看 [GM] 第 5 章，或者 [SE-TH] 第 6 章。

12.7.5.5 读者可能要问：对于任意一个 d 维凸多面体，情况又是怎样呢？答案是：如果 φ_i 在这里表示 P 的 i 维面的个数 $(i=0,1,\cdots,d-1)$，则恒有 $\sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i\varphi_i=1+(-1)^{d-1}$。

读者可对 $d=2$ 和 $d=4$ 时的正多胞形加以验证。关于其证明，参看 [GG] 第 102—103 页。也可参看 [CR 2] 第 IX 章。

下面，X 是三维欧几里得仿射空间。

12.8 Cauchy 定理

有些定理叙述很简单，证明却很困难。本定理就是这样的一个极好的例子。读者若用纸头制作一个凸多面体，就会看出这一

点：刚开始构作时，如果顶点的汇集处多于三个面，则多面体是能够弯曲的(绕着棱)．但当它做好后，就不能再弯曲了．要是按的力量太大，则或者是面发生形变，或者是多胞形裂开．事实上，我们有下面更强的结果．

12.8.1 定理 (Cauchy). 设 P, P' 是 X 的两个凸多面体．f: $\mathrm{Fr}\,P \to \mathrm{Fr}\,P'$ 是保持顶点、棱和面的一个双射．假设对于 P 的任意一个面 F，限制 $f|_F$: $F \to f(F)$ 是一个等距，则存在 X 的一个等距 $\bar{f}$，使得 $\bar{f}(P) = P'$，$\bar{f}|_{\mathrm{Fr}P} = f$．特别，$P$ 和 P' 是等距的．

12.8.2 推论. 一个凸多面体 P 是不可弯曲的．换言之，设 $P(t)$ 是多面体（不一定是凸的）的集合，$t \in [0, 1]$ 和 $P(0) = P$，而且 f_t: $\mathrm{Fr}\,(P(0)) \to \mathrm{Fr}\,(P(t))$，$t \in [0, 1]$ 是一族双射，使得对于 $P(0)$ 的任意一个面 F，$f_t|_F$ 是 F 和 $f_t(F)$ 之间的一个等距．此外，若再假定 $f_0 = \mathrm{Id}_P$，而 f: $\mathrm{Fr}P \times [0, 1] \ni (x, t) \longmapsto f_t(x) \in X$ 是连续的，则存在一族等距 $\bar{f}_t \in \mathrm{Isom}\,(X)$，$t \in [0, 1]$，使得对任意的 $t \in [0, 1]$ 有 $\bar{f}_t|_{\mathrm{Fr}(P(0))} = f_t$，而且 $\bar{f}_t(P(0)) = P(t)$．

考虑这样的点 $t \in [0, 1]$，它使得存在一个等距 $\bar{f}_t$，它是 f_t 的延拓并且 $\bar{f}_t(P(0)) = P(t)$．这样的 t 所构成的集合在 $[0, 1]$ 中既是开集，又是闭集：利用连续性的假定，可知它是闭的；它是开集的原因是，如果 $P(t)$ 是一个多胞形，则对于邻近 t 的值 t'，$P(t')$ 仍是一个多胞形，从而可用 12.8.1．

12.8.3 推论. 设 P 是一个多胞形，满足

(i) 所有的面均为边数相同的正多边形．

(ii) 每一个顶点属于相同个数的面；则 P 是正多胞形．

根据 12.7.4 和 12.6.7，确实存在一个正多胞形 P'，满足上述的 P 的条件，因此可构造一个双射 f: $\mathrm{Fr}\,P \to \mathrm{Fr}\,P'$，它满足 12.8.1 的假设条件．因此，$P$ 与一个正多胞形等距，故它本身是正多胞形．

12.8.4 附注

12.8.4.1 如果 P 是一个多胞形，但 P' 是一个不一定凸的多面体，则定理 12.8.1 可能是不成立的．图 12.8.4 就说明了这一点，

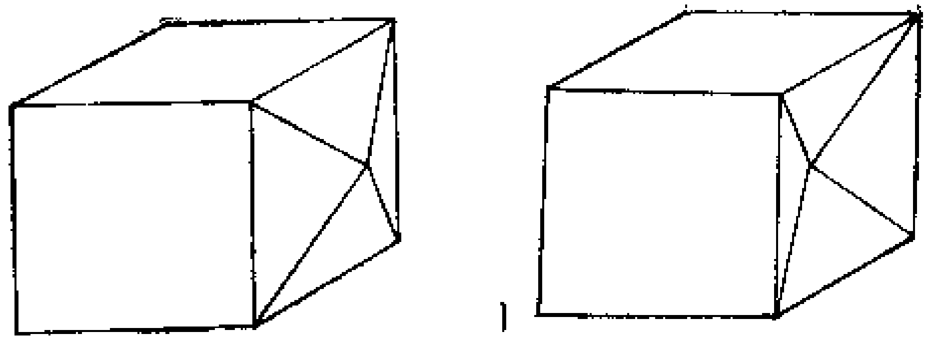


图 12.8.4.

其中 P' 是从 P 用关于一个平面的对称改动右面四个面得出的。

但我们将会看到，尽管如此，P 还是不可弯曲的。不能用连续的等距把 P 变到 P'。

12.8.4.2 自从 Cauchy 的最初的论文在 1813 年发表以后，这始终是一个悬而未决的问题：是不是存在可弯曲的（因而必然是非凸的）多面体？这个问题 164 年以来，没有一个明确的回答，直到最近才由 Robert Connelly 一举解决了，他构作了一个可弯曲的多面体（且还是单连通的）。参阅：R. Connelly, A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra, Publications Mathématiques de l' IHES. n^0 **67**, Presses Universitaires de France. 两本古典的著作是 [GL] 和 [CO]。关于这样一个多面体的实际作法参看 R. Connelly 的预印本：How to Builda Flexible Polyhedral Surface (Cornell University)。也可参看本书第 170—171 页。

12.8.4.3 在二维时定理 12.8.1 是不成立的：只要一个多边形的边数大于 3，就很容易变形成边长相等的一个多边形（看 10.8.3!）。相反，从 12.8.1 可推出，对任意 $\geqslant 3$ 的维数，定理是成立的：证明可用归纳法，主要思想如下。

如果用三维球面 S^3 内的凸球面多面体代替三维欧几里得仿射空间中的多胞形，定理依然是成立的（下面的证明可不作更改地照用）。现设 P, P' 如 12.8.1 所述，维数 $d=4$；对于任意的 $x \in P$，构

作其星形集 $\mathrm{Et}_x P$，它是 P 与以 x 为中心、半径相当小的一个球面的交集. 则 12.8.1 的假设条件说明 $\mathrm{Et}_x P$, $\mathrm{Et}_{f(x)} P'$ 是 S^3 的球面多面体(正交化之后)，它们满足上面所述的条件，因而是等距的. 如果我们回到 P, P'，这就是说 f 保留 P 和 P' 的二面角，由此，再根据下面的引理就得出 P, P' 是等距的. 当然，当 $d = 3$ 时，这个方法行不通，这正是整个证明的困难所在，原因则是 S^2 的多边形，只要其边数大于 3，就必定是可变形的了.

12.8.5 基本引理. 利用 12.1.12 中引入的一个多胞形的二面角的概念，记 $\delta_A(P)$ 为多胞形 P 在棱 A 处的二面角.

12.8.5.1 引理. 如果 12.8.1 中的双射 f 保持二面角不变，即若对 P 的任意一条棱 A 有 $\delta_{f(A)}(P') = \delta_A(P)$，则 f 可延拓成为空间中的一个等距 $\bar{f}$，使得 $\bar{f}(P) = P'$.

模仿 12.4.2 中的证明. 选取 P 的一个面 F，依假设条件，可假定 $f(F) = F$，且 P 和 P' 位在由 F 决定的同一个半空间内. 设 A 是 P 的一条棱，并且 G, G' 是沿 A 与 F 相邻的两个面. 因为 $\delta_A(P) = \delta_A(P')$，所以 G, G' 是等距的，且在 F 的同一边，故 $G = G'$. 于是，依靠 12.1.13，逐步逐步可证明本引理.

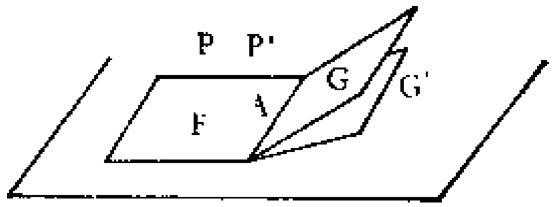


图 12.8.5.

12.8.6 Cauchy 定理的证明

12.8.6.1 根据 12.8.5.1，整个问题归结为证明 f 保持二面角不变. 我们注意到根据球面三角形相等的情形(参见 18.6.13.10)，如果 P 的任一顶点都属于三个面，上述结论容易得证. 然而，一旦此数变成 4 时，我们遇到的那些边数为常数的球面多边形，都是容易发生形变的.

证明的思想是以 Cauchy 为这个定理而泡制的一个关键性的

引理作为基础的.该引理指出，当一个球面多边形变形为常数边长时，角度的增加和角度的减少必然是充分交错的：参见 18.7.16. 证明的思想是计算这些交错数，第一次先按面数，然后，先按顶点数，比较这两个和数，它们应该是相等的，这样就与 Euler 公式发生矛盾. 若对 P 的任意的棱 A，有 $\delta_{f(A)}(P') \neq \delta_A(P)$，则证明要容易得多.

12.8.6.2 对于满足定理 12.8.1 假设条件的 P, P', f，我们引入：

$\mathscr{E}$：表示 P 的棱的集合. 函数 ε: $\mathscr{E} \to \{-1, 0, 1\}$定义为：

当 $\delta_A(P) < \delta_{f(A)}(P')$, $\delta_A(P) = \delta_{f(A)}(P')$, $\delta_A(P) > \delta_{f(A)}(P')$ 时，$\mathscr{E}$分别取值-1, 0, 1.

我们称 P 的两条棱 $\{A, B\}$ 是相邻的，是指 $A \cap B$ 为 P 的一个顶点，且 A, B 属于同一个面.

12.8.6.3 第一种情形: $\forall A \in \mathscr{E}$, $\varepsilon(A) \neq 0$. 所谓两条相邻棱的序对 $\{A, B\}$ 表示一个变号，意即 $\varepsilon(A) \cdot \varepsilon(B) = -1$. 假设 ν 是表示一个变号的序对总数.

设 x 是 S 的一个顶点，π 是以 x 为中心、半径足够小的一个球面同 P 相交而成的凸的球面多边形. 对于 $x' = f(x)$, π' 有同样

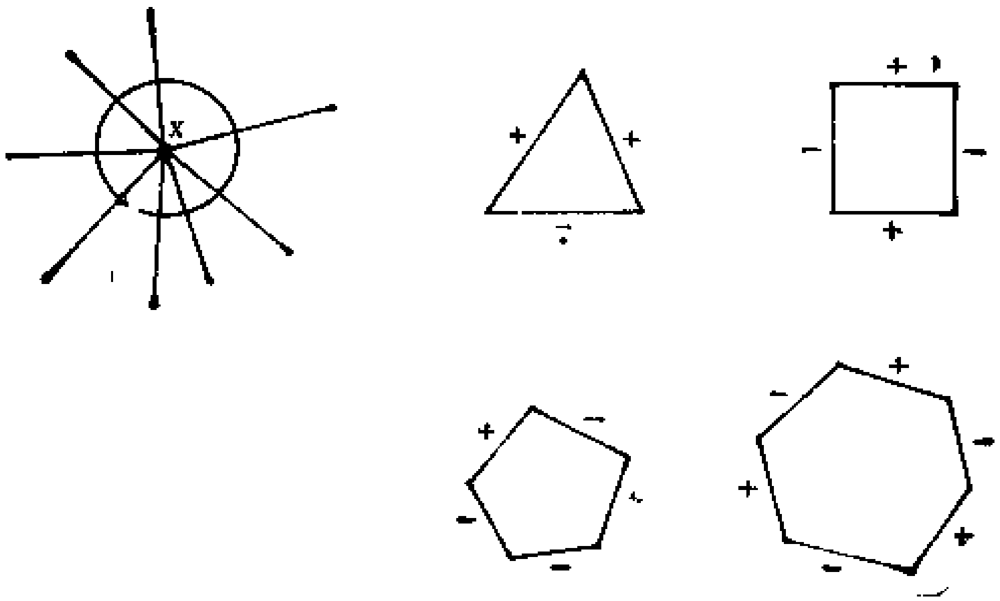


图 12.8.6.3.

的含义。依假设条件，只要这两个多边形都在单位球面 S^2 上，就存在一个双射 $\pi \to \pi'$，它保持边的长度。

Cauchy 引理（参见 18.7.16）恰好说明，我们对于和 x 相交的相邻棱序对可算得变号数 $\geqslant 4$；因此，由于有 σ 个顶点（12.7 的记号），则有 $\nu \geqslant 4\sigma$.

现在计算有 i 个顶点的一个面上相邻棱序对的变号数：对于 $i=3$，至多 2 个；对于 $i=4$ 或 5，至多 4 个；对于 $i=6$ 或 7，至多 4 个，…等等，于是，

$$\nu \leqslant 2\varphi_3 + 4\varphi_4 + 4\varphi_5 + 6\varphi_6 + 6\varphi_7 + \cdots.$$

应用 12.7.2，我们得到：

$$\begin{aligned} 4\alpha - 4\varphi &= 6\varphi_3 + 8\varphi_4 + 10\varphi_5 + 12\varphi_6 + 14\varphi_7 + \cdots \\ &\quad - (4\varphi_3 + 4\varphi_4 + 4\varphi_5 + 4\varphi_6 + 4\varphi_7 + \cdots) \\ &= 2\varphi_3 + 4\varphi_4 + 6\varphi_5 + 8\varphi_6 + 10\varphi_7 + \cdots \\ &\geqslant \nu \geqslant 4\sigma. \end{aligned}$$

由此推出：$\sigma - \alpha + \varphi \leqslant 0$，与 12.7.3 矛盾。

12.8.6.4　第二种情形： $\mathscr{E}(A)$ 都是任意的。如果 $A \in \Xi$，使得 $\mathscr{E}(A) = 0$，则称 A 是 P 的故棱。又如果 $A \in \Xi$，使得 $\mathscr{E}(A) \neq 0$，则称 A 是 P 的新棱。新棱所成的集合记作 Ξ'，$\alpha' = \#\Xi'$。从 $\mathrm{Fr}\,P$ 中去掉 Ξ' 的棱，则得到拓扑空间 $U = \mathrm{Fr}\,P \setminus \bigcup_{A \in \Xi'} A$；$U$ 的连通分支的闭包称为 P 的新面。以 Φ' 表示新面的集合，$\varphi' = \#\Phi'$. 最后，新顶点乃是 P 的至少属于一条新棱的顶点。设 Σ' 是新顶点的集合，记 $\sigma' = \#\Sigma'$。请注意由 Cauchy 引理可知：任意一个新顶点至少属于两条棱，即没有一条新棱是具有自由端点的。

12.8.6.5　恒有 $\sigma' - \alpha' + \varphi' \geqslant 2$. 事实上，我们可以逐个地安置假棱，这样就对 $i = 1, \cdots, (\alpha - \alpha')$，给出了介于 σ, α, φ 和 $\sigma', \alpha', \varphi'$ 之间的基数 $\sigma_i, \alpha_i, \varphi_i$；要注意到每一步都须把一条新的故棱附着于一个新顶点或一个已有的顶点（注意，在这样的重新安排中，可能出现暂时有自由端点的棱）。对于每一步 i，我们总有 $\alpha_{i+1} = \alpha_i + 1$，并若 $\sigma_{i+1} = \sigma_i$，则 $\varphi_{i+1} = \varphi_i$ 或 $\varphi_{i+1} = \varphi_i + 1$. 又

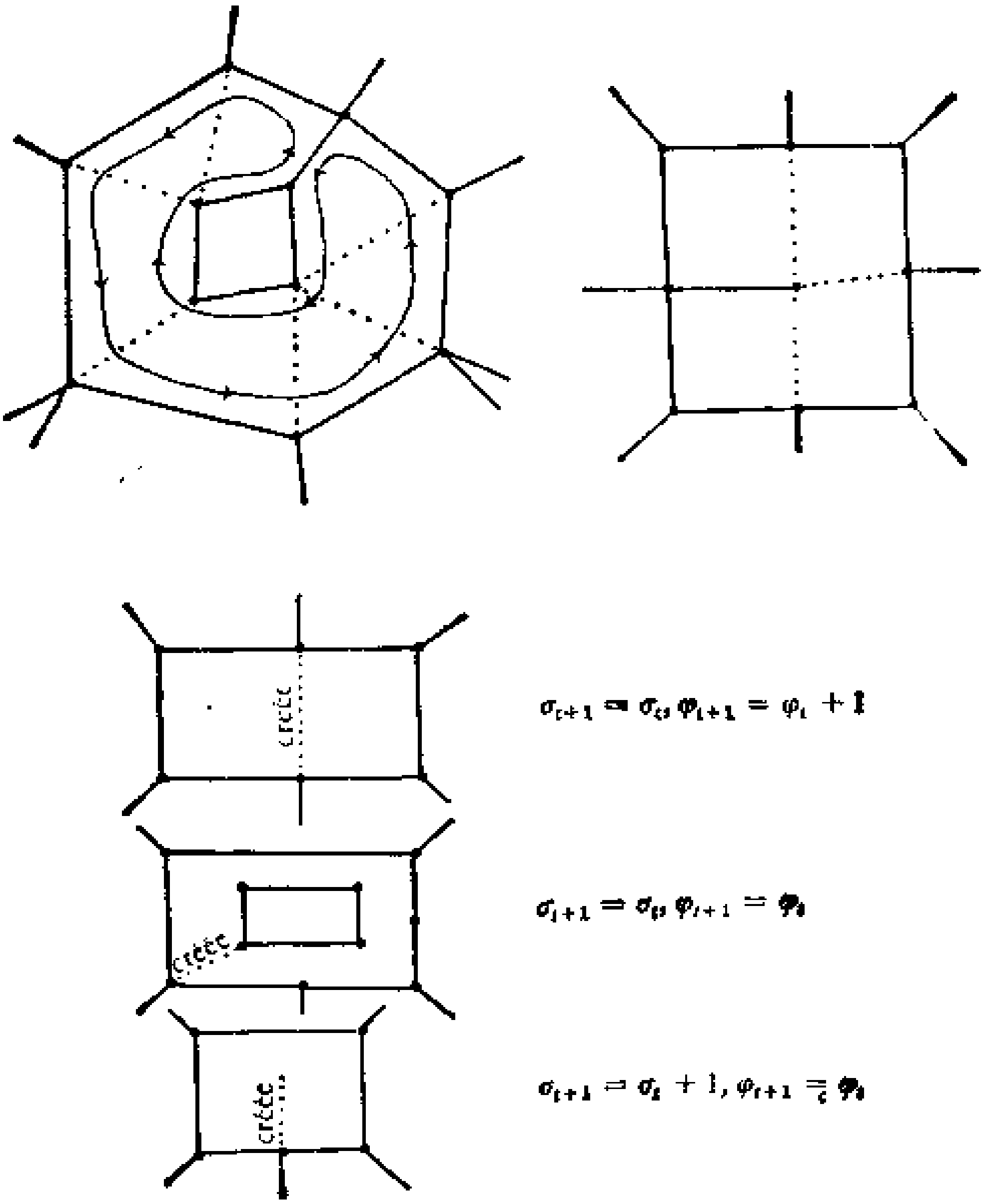


图 12.8.6.4.

若 $\sigma_{t+1} = \sigma_t + 1$，则 $\varphi_{t+1} = \varphi_t$. 因此函数 $\sigma_t - \alpha_t + \varphi_t$ 在任何情况下都是不增的. 依照 12.7.3，它取值为 2. 当 $t = \alpha - \alpha'$ 时，12.8.6.5 已得证. 对这样一个公式，可参考 [LU] 第 13 章，[STRA] 第 33 节，或 [AV] 第 78 页公式 (3).

12.8.6.6 现在，我们可如同第一种情形一样进行讨论，沿用相邻新棱、变号等概念，变号总数总记为 ν. 只须注意，一条新棱不一定属于两个新面，但只可能属于 1 个或 2 个；作为补救的办法，我们把一个新面的边数算作新边数，这样的确增大了两次作为该

面的边的那些新棱的基数(参见图 12.8.6.4)。用此约定，设 Φ_i' 是具有 i 条边的新面的集合，$\varphi_i' = \#\Phi_i$。则把 Cauchy 引理引用于 σ 个新顶点即得：

$$2\alpha' = \sum_i i\varphi_i', \quad \varphi' = \sum_i \varphi_i', \quad \nu \geqslant 4\sigma';$$

对于每一个新面计算变号数：

$$\nu \leqslant 2\varphi_3' + 4\varphi_4' + 4\varphi_5' + 6\varphi' + 6\varphi_7' + \cdots.$$

由此，与 12.8.6.3 相仿地得出：$4\alpha' - 4\varphi' \geqslant \nu \geqslant 4\sigma'$，与 12.8.5 矛盾。于是，我们这样构造新棱、新面等的做法是不可能的，亦即所有的棱都是故棱，$\mathscr{E}(A) = 0$，$\delta_A(P) = \delta_{f(A)}(P')$，$\forall A \in \Xi$。由 12.8.5.1 即可得证。

在本章其余部分，X 是欧几里得仿射空间。

12.9 用多胞形逼近紧凸集

在 Hausdorff 距离的意义下(参见 9.11)，我们要利用多胞形来逼近紧致凸集；这样做有好几方面的重要意义：用初等方法定义凸集的体积 (12.9.3.2)，证明体积是凸集上的连续函数且凸集的边界是零测度的(12.9.2.4 和 12.9.3.4)，定义凸集的面积(12.10.2)。

12.9.1 凸集和 Hausdorff 距离. 沿用 9.11 中的记号；因而，凸包络 $\mathscr{E}$ 决定了一个映射 $\mathscr{E}$: $\mathscr{K} \to \mathscr{K}$，参阅 11.1.8.7。

12.9.1.1 命题. 映射 $\mathscr{E}$: $\mathscr{K} \to \mathscr{K}$ 是比值为 1 的 Lipschitz 映射。

参阅定义 9.11.1 只要证明当 $F, G \in \mathscr{K}$，满足 $F \subset B(G, \rho)$ $(\rho \geqslant 0)$ 时，有 $\mathscr{E}(F) \subset B(\mathscr{E}(G), \rho))$ 就够了；而这从 11.8.7.6 即可证得。

12.9.1.2 推论. 记 $\mathscr{C} = \{F \in \mathscr{K} : F$ 是凸集$\}$，则 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{K}$ 的一个闭集。特别，$\mathscr{C}$ 是完全集，且 $a \in X$ 和 $r \geqslant 0$ 时，$\mathscr{C}_{ar} =$

$\mathscr{H}_{a,r} \cap \mathscr{C}$ 是紧集。

下述引理在几何学上很直观地说明了关于凸集的"趋向"的概念。

12.9.1.3 引理. 设 A, C, D 是三个紧凸集，使得 $\mathring{C} \neq \emptyset$，$D \subset C \subset A$，并且 $\operatorname{Fr} A \cap C = \emptyset$，$\operatorname{Fr} C \cap D = \emptyset$，则存在 $\eta > 0$，使得对任意一个凸集 S，只要 $\delta(C, S) \leqslant \eta$，则有 $D \subset S \subset A$。

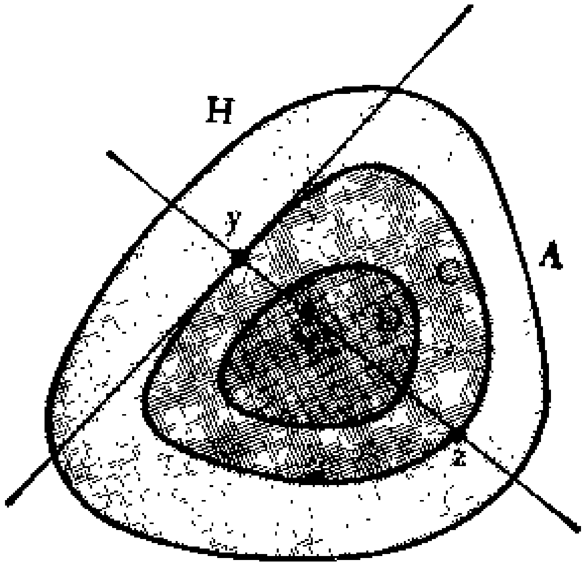


图 12.9.1.

当 $S \subset A$ 时，很容易证明。只要取 $\eta = d(\operatorname{Fr} A, C)$ 即可。

当 $S \supset D$ 时，也取 $\eta = d(\operatorname{Fr} C, D)$，并设 S 满足 $\delta(C, S) \leqslant \eta$。采用反证法。假设 $x \in D \setminus S$。取 y 使得 $d(x, y) = d(x, S)$，我们知道（参见 11.1.1.7.2），$S \subset H$，这里 H 是在 y 点与 $\langle x, y \rangle$ 正交的超平面所决定的一个半空间。由于 $x \in \mathring{C}$，若设 $z \in \langle x, y \rangle \cap \operatorname{Fr} C$ 是不在 H 上的点，则由 η 的定义，有

$$d(z, S) = d(z, y) > d(z, x) \geqslant \eta;$$

但因 $z \in C$，与 $C \subset B(S, \eta)$ 矛盾。

12.9.2 逼近引理. 记 $\mathscr{P}$ 为所有紧凸多面体的集合，$\mathscr{P}^{\bullet}$ 是所有多胞形的集合，并且 $\mathscr{C}^{\bullet} = \{C \in \mathscr{C}: \dim C = \dim X\}$（或还有 $\mathring{C} \neq \emptyset$，参见 11.2.7）。在这些写法里，$X$ 都被省略了。如有需要，可写作 $\mathscr{P}(X)$，$\mathscr{P}^{\bullet}(X)$，$\mathscr{C}(X)$，$\mathscr{C}^{\bullet}(X)$。

12.9.2.1 引理. 对任意的 $\varepsilon>0$ 和 $C\in\mathscr{C}^{\bullet}$, 存在 $P\in\mathscr{P}^{\bullet}$ 使得 $P\subset C\subset B(P,\varepsilon)$ (特别有 $\delta(P,C)\leqslant\varepsilon$).

因为 C 是紧的, 故能用 n 个球 $B(a_i,\varepsilon)$, $a_i\in C$ 覆盖它, 即 $C\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(a_i,\varepsilon)$. 则凸包络 $P=\mathscr{E}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 即为所求, 参见 12.1.15.

12.9.2.2 **推论.** $\mathscr{P}$ 在 $\mathscr{C}$ 内是稠密的.

我们刚才看到 $\mathscr{P}^{\bullet}$ 在 $\mathscr{C}^{\bullet}$ 内是稠密的. 现在, 如果 $C\in\mathscr{C}\setminus\mathscr{C}^{\bullet}$, 并设 $Y=\langle C\rangle$ 是由它生成的子空间. 在 Y 内, 凸集 C 是内部非空的 (参见 11.2.7), 我们可用 $P\in\mathscr{P}(Y)$ 来逼近它. 如果 I_{ε} 表示在与 Y 正交的子空间 $Y^{\perp}$ 内以 ε 为半径的球, 则 $P\times I_{\varepsilon}$ 逼近 C.

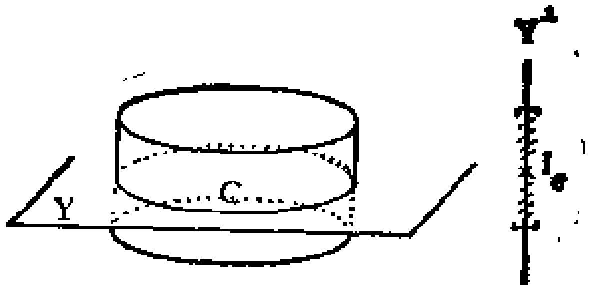


图 12.9.2.2.

在下文中, 把一个 $C\in\mathscr{C}$ 从两侧, 而不仅仅是如上述引理中那样把内部用多胞形包起来是有益的, 而且引理中的 $B(P,\varepsilon)$ 因其不是多胞形而颇不方便.

12.9.2.3 引理. 对于任意的 $C\in\mathscr{C}^{\bullet}$, $a\in\mathring{C}$ 和 $\eta>1$, 总存在 $P\in\mathscr{P}^{\bullet}$, 使得 $P\subset C\subset H_{a,\eta}(P)$, $\mathrm{Fr}(C)\cap P=\emptyset$, $C\cap\mathrm{Fr}(H_{a,\eta}P)=\emptyset$.

首先, 固定 $r>0$, 使得 $B(a,r)\subset\mathring{C}$. 然后, 取 ε, 使得 $0<\varepsilon<r(\eta-1)$. 根据 12.9.2.1, 设有一个 $P\in\mathscr{P}^{\bullet}$, 使得 $P\subset C\subset B(P,\varepsilon)$. 根据 12.9.1.3, 只要 ε 足够小, 就有 $P\supset B(a,r)$. 由作法可知, P 的一个面 F 和 $H_{a,\eta}(F)$ 之间的距离 $\geqslant(\eta-1)r>\varepsilon$; 由此推出:

$$\dot{H}_{a,\eta}(P)\supset\dot{B}(P,\varepsilon)\supset\dot{C}.$$

至于边界的不相交条件，把P修改为一个比值<1而足够接近1的位似即可。

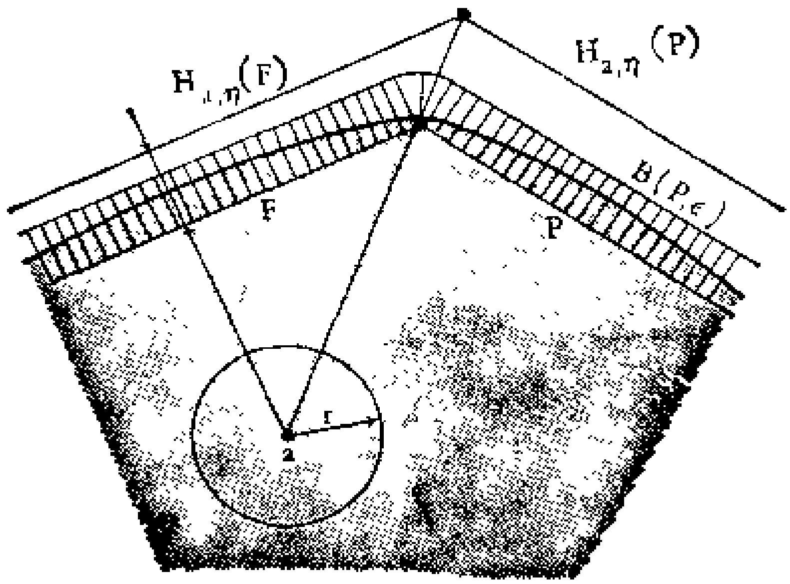


图 12.9.2.3.

12.9.2.4 推论. 任一凸集C具有零测度的边界(参见9.12.5)．

如果$\mathring{C}=\varnothing$，$C\subset Y$是一个真子空间，于是C本身的测度为0。

如果$\mathring{C}\neq\varnothing$，应用12.9.2.3；$C$的边界包含在$P'\backslash P$内，这里$P'=H_{a,\eta}P$。因为$\mathfrak{L}(P'\backslash P)=\mathfrak{L}(P)(\eta^d-1)\leqslant\mathfrak{L}(C)(\eta^d-1)$(参见9.12.3)，当$\eta\to 1$时，就有$\mathfrak{L}(P'\backslash P)\to 0$。

12.9.3 紧凸集的体积. 沿用9.12中的记号.

12.9.3.1 命题. 对$C\in\mathscr{C}$，我们有：

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(C)&=\sup\{\mathfrak{L}(P):P\in\mathscr{P}\text{ 和 }P\subset C\}\\&=\inf\{\mathfrak{L}(P):P\in\mathscr{P}\text{ 和 }P\supset C\}.\end{aligned}$$

如果$\mathring{C}=\varnothing$，如同12.9.2.2中的证明一样，我们可以归结为$\mathring{C}\neq\varnothing$的情况．对后者，可应用12.9.2.3．

12.9.3.2 鉴于引理12.9.2.3，我们就可以从12.2.5初等体积出发，把12.9.3.1作为$\mathfrak{L}(.)$在全体凸集上的定义．这样，我们就

有可能避免求助于积分理论。

12.9.3.3 命题. 体积 $\mathfrak{L}$: $\mathscr{C}^* \to \mathbf{R}$ 是严格递增的。即若 D, $C \in \mathscr{C}$ 以及 $D \subset C$, $D \neq C$, 则 $\mathfrak{L}(D) < \mathfrak{L}(C)$。

事实上，如果 $C \supset D$, $C \neq D$, 引理 11.2.4 表明 $\mathring{C} \backslash D \neq \emptyset$. 设 $\varepsilon > 0$ 和 $x \in \mathring{C} \backslash D$ 使得 $B(x, \varepsilon) \subset C \backslash D$, 则有

$$\mathfrak{L}(C) \geqslant \mathfrak{L}(D) + \mathfrak{L}(B(x,\varepsilon)) > \mathfrak{L}(D).$$

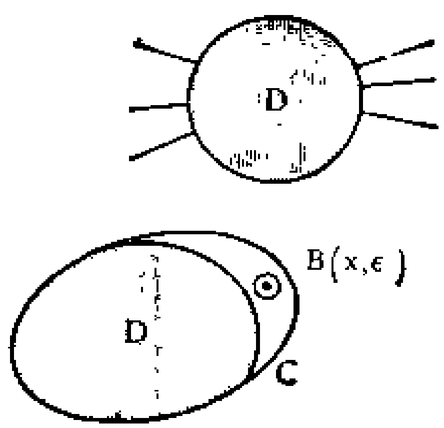


图 12.9.3.

在 $\mathscr{K}$ 内，此结论显然是不对的。我们记得(参见 9.12.5)：体积在 $\mathscr{K}$ 上不是连续的；但在 C 上有：

12.9.3.4 命题. 体积 $\mathfrak{L}$: $\mathscr{C} \to \mathbf{R}$ 是一个连续函数。

我们的做法同 9.12.6 中一样。我们知道，如果在 $X \backslash \mathrm{Fr}\, C$ 上，$\lim_{n\to\infty} C_n = C$, 则 $\lim_{n\to\infty} \chi_{C_n} = \chi_C$。但在这里，$\mathrm{Fr}\, C$ 是零测度的，于是，$\lim_{n\to\infty} \int_X \chi_{C_n}\mu = \int_X \chi_C \mu$, 在任何一个 X 上成立。

我们可以给出命题的一个初等的证明。如果 $C = \lim_{n\to\infty} C_n$ 内部是空的，则如同在 12.9.2.2 中的证明一样，把它装在一个匣内。如果 $\mathring{C} \neq \emptyset$, 利用 12.9.2.3 构作两个多胞形 P, P', 使得 $P \subset C \subset P'$, $\mathfrak{L}(P') - \mathfrak{L}(P) \leqslant \varepsilon$ 以及 $\mathrm{Fr}\, C \cap P = \emptyset$, $\mathrm{Fr}\, P' \cap C = \emptyset$; 应用 12.9.1.3 可知，由于当 η 足够小时，$\delta(C, D) \leqslant \eta$, 故而 $P \subset D \subset P'$, 因此 $|\mathfrak{L}(D) - \mathfrak{L}(C)| \leqslant \mathfrak{L}(P') - \mathfrak{L}(P) \leqslant \varepsilon$.

12.10 紧凸集的面积

我们在 9.12.7 中已经看到，k 维体积的概念是很复杂的。对于凸集，很自然地会希望通过用多胞形逼近，再取逼近多胞形的面积的极限的做法，来找到它们边界的 $(d-1)$ 维体积(在这里应称为面积了)；这是因为对于多胞形我们已经有一个令人满意的面积

定义，参见 12.3. 这条路是行得通的，但是，我们下面宁愿采取 Cauchy 公式 12.3.3 作为面积的定义。首先，应该验证：

12.10.1 引理. 沿用 12.3 中的记号，函数

$$\mathfrak{L}(p_{\cdot}(\cdot)) : S \times \mathscr{C}^{\bullet} \ni (\xi, C) \longmapsto \mathfrak{L}(p_{\xi}(C)) \in \mathbf{R}$$

是连续的。

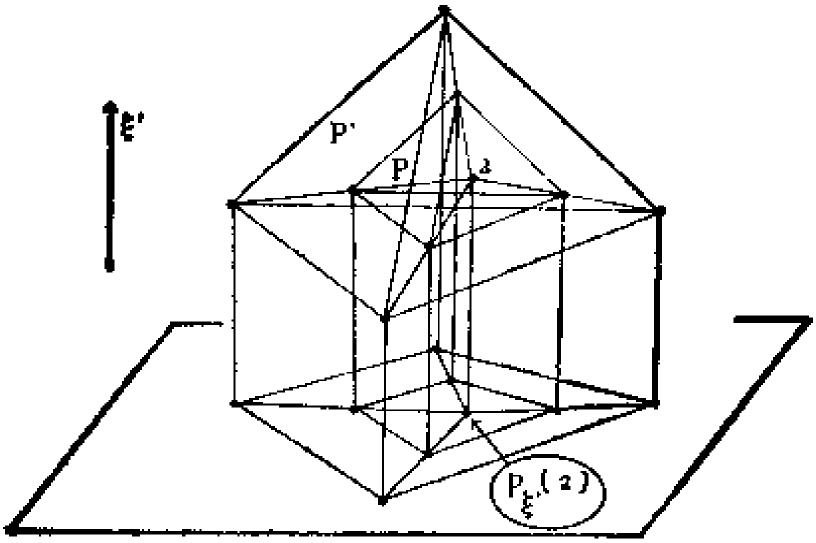


图 12.10.1.

固定 $\xi \in S$, $C \in \mathscr{C}^{\bullet}$, $a \in \mathring{C}$, $\varepsilon > 0$；对于任意的 $\eta > 1$，存在一个 $P \in \mathscr{P}^{\bullet}$（参见 12.9.2.7），使得 $P \subset C \subset P' = H_{a,\eta}P$, $\mathfrak{L}(P') - \mathfrak{L}(P) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, $\operatorname{Fr} C \cap P = \varnothing$, $\operatorname{Fr} P' \cap C = \varnothing$. 因为对于任意的 $\xi' \in S$, $H_{p_{\xi'}(a),\eta} \circ p_{\xi'} = p_{\xi'} \circ H_{a,\eta}$，故有

$$\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P')) = \eta^{d-1}\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P)).$$

因为存在 r，使得 $B(a, r) \supset C$，所以，对任意的 $\xi' \in S$ 有（参见 9.12.4.5）：

$$|\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P')) - \mathfrak{L}(p_{\xi'}(P))| \leqslant (\eta^{d-1} - 1) r^{d-1} \beta(d-1).$$

从而，可以固定 η 和 P，使得

$$|\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P') - \mathfrak{L}(p_{\xi'}(P))| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \xi' \in S.$$

但是，12.3.3.2 的公式表明，$S \ni \xi' \longmapsto \mathfrak{L}(p_{\xi'}(P)) \in \mathbf{R}$ 在 ξ' 处是连续的，于是存在 ζ，使得 $\|\xi' - \xi\| \leqslant \zeta$ 蕴涵

$$|\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P)) - \mathfrak{L}(p_\xi(P))| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

根据 12.9.1.3，可选取 θ 足够地小，使得 $\delta(D, C) \leqslant \theta$ 蕴涵 $P \subset D \subset P'$，从而有

$$|\mathfrak{L}(p_{\xi'}(D)) - \mathfrak{L}(p_\xi(C))| \leqslant |\mathfrak{L}(p_{\xi'}(D)) - \mathfrak{L}(p_{\xi'}(P))|$$
$$+ |\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P)) - \mathfrak{L}(p_\xi(P))| + |\mathfrak{L}(p_\xi(P)) - \mathfrak{L}(p_\xi(C))|$$
$$\leqslant |\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P')) - \mathfrak{L}(p_{\xi'}(P))| + \frac{\varepsilon}{3}$$
$$+ |\mathfrak{L}(p_\xi(P')) - \mathfrak{L}(p_\xi(P))| \leqslant \varepsilon.$$

12.10.2 命题.定义. 对于任意 $C \in \mathscr{C}^\bullet$，积分

$$\mathfrak{A}(C) = (\beta(d-1))^{-1} \int_{\xi \in S} \mathfrak{L}(p_\xi(C))\sigma$$

存在，称它为C 的面积(当 $d = 2$ 时，称为长度)。这样定义的面积同多胞形的面积是一致的.面积 $\mathfrak{A}$: $\mathscr{C}^\bullet \to \mathbf{R}$ 是连续的，且是严格递增的。它在 $\mathrm{Is}(X)$ 下是不变量。

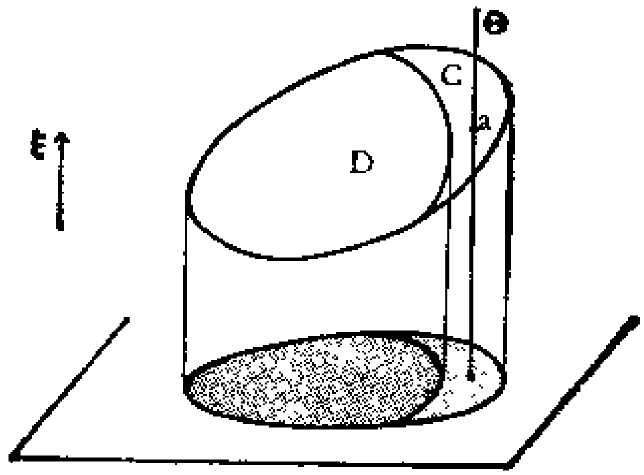


图 12.10.2.

由 12.10 和积分理论，即得存在性和连续性。根据 12.3.3，$\mathfrak{A}(C)$ 和多胞形的面积是一致的。

现设 $D \subset C$，$D \neq C$，并如在 12.9.3.3 中一样，设球 $B(a, \varepsilon) \subset C \backslash D$，$\varepsilon > 0$.根据 11.4.1，存在一条含 a 且与D不相交的直线 Θ；设$\xi \in \vec{\Theta} \cap S$，根据连续性，过 a 且与足够邻近 ξ 的 η 平行的直

线决不和D相交。因此，12.9.3.3 表明，对于这些 η，$\mathfrak{L}(p_\eta(D)) < \mathfrak{L}(p_\eta(C))$，故有 $\mathfrak{A}(D) < \mathfrak{A}(C)$。

12.10.3 推论. 对任意的 $C \in \mathscr{C}^\bullet$，

$$\mathfrak{A}(C) = \sup\{\mathfrak{A}(P): P \in \mathscr{P}^\bullet \text{ 和 } P \subset C\} = \inf\{\mathfrak{A}(P): P \in \mathscr{P}^\bullet \text{ 和 } P \supset C\}.$$

12.10.4 附注

12.10.4.1 我们来验证，当 $C = S(a, r)$ 时，可得 $\mathfrak{A}(C) = r^{d-1}\alpha(d)$。

事实上，对于任意的 ξ，$p_\xi(S(a, r))$ 是以 r 为半径的一个球。从而：

$$\mathfrak{L}(p_\xi(S(a, r))) = r^{d-1}\beta(d-1).$$

由此得出

$$\mathfrak{A}(S(a, r)) = r^{d-1}\int_S \sigma = r^{d-1}\cdot\alpha(d).$$

12.10.4.2 一个很自然的想法是把关于平面上一个凸集C的长度同曲线 Fr C 的长度进行比较。说实在的，并不能直接把 Fr C 看作一条曲线。然而，11.3.4 给出了 Fr C 的一个连续的参数表示；因此，内接于 Fr C 的一个多边形的周长恰是定义 9.9.1 中的一个和式。这就证明了两个长度概念是一致的：参见 12.11.5。

12.10.5 应用：等宽曲线. 我们称一条曲线或一个凸集是等宽的，意指欧几里得平面的一个凸集 C，它使 $\forall\xi \in S$，线段 $p_\xi(C)$ 有定长。这等价于沿 ξ 方向的C的两条支撑直线（参见 11.5.6）保持定距离。在这种情形下，不单有圆盘，例如，还有 Reuleaux 三角形（图 12.10.5.1）；更一般为：具有奇数个尖点的适当曲线的切线的适当的正交轨线都是等宽曲线（有许多这样的曲线）。

12.10.2 和 12.10.4 证明了这一点。因为，如果 l 表示这个常数宽度，则凸集具有长度 πl。等宽"体"早已是许多研究工作的对象，但在这一范畴内，仍有许多尚未解决的问题。例如，Blaschke-Lebesque 的结论是：在等宽的平面凸集中间，唯一的具有最小面积的是 Reuleaux 三角形；但是，目前我们还不知道维数 ≥ 3 时的类似结果。对于等宽体，参考文献是［EN］第 7 章，［VE］第 156

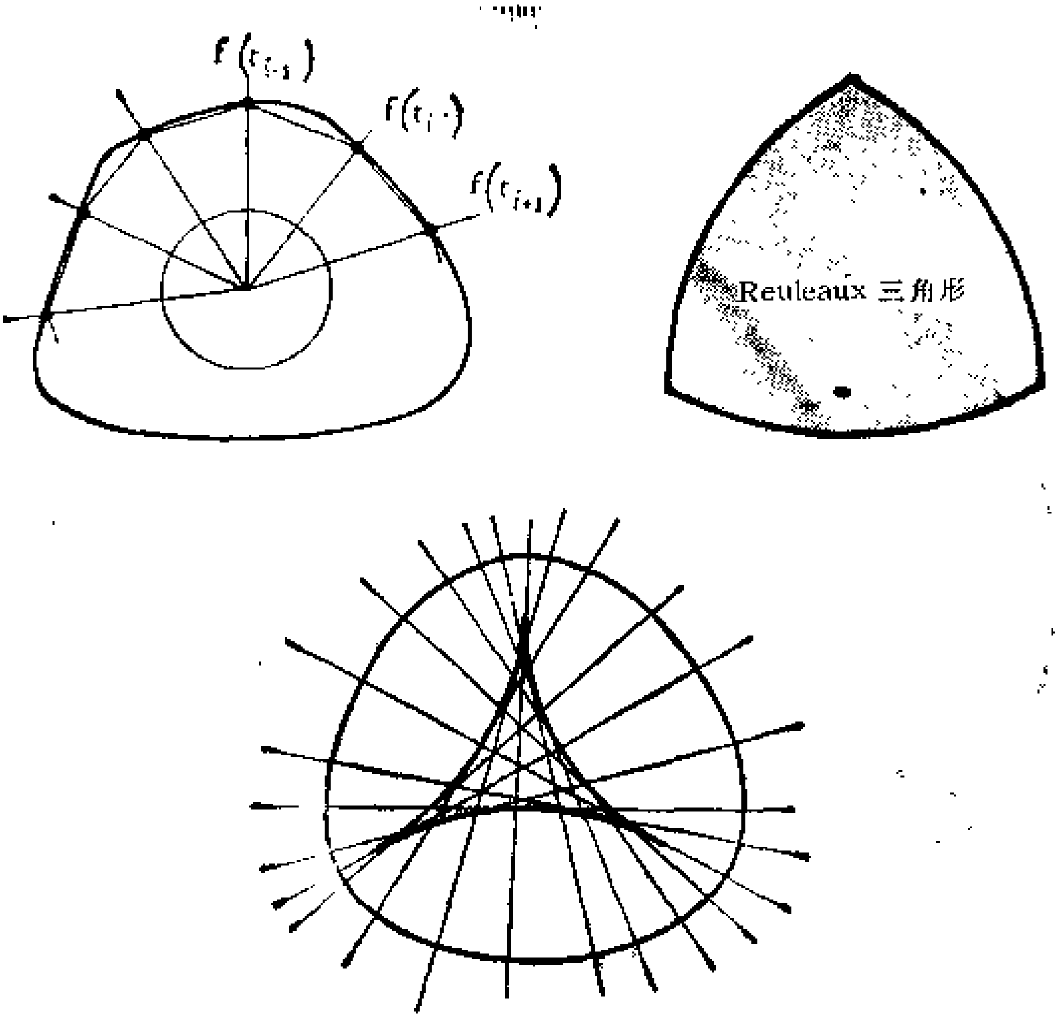


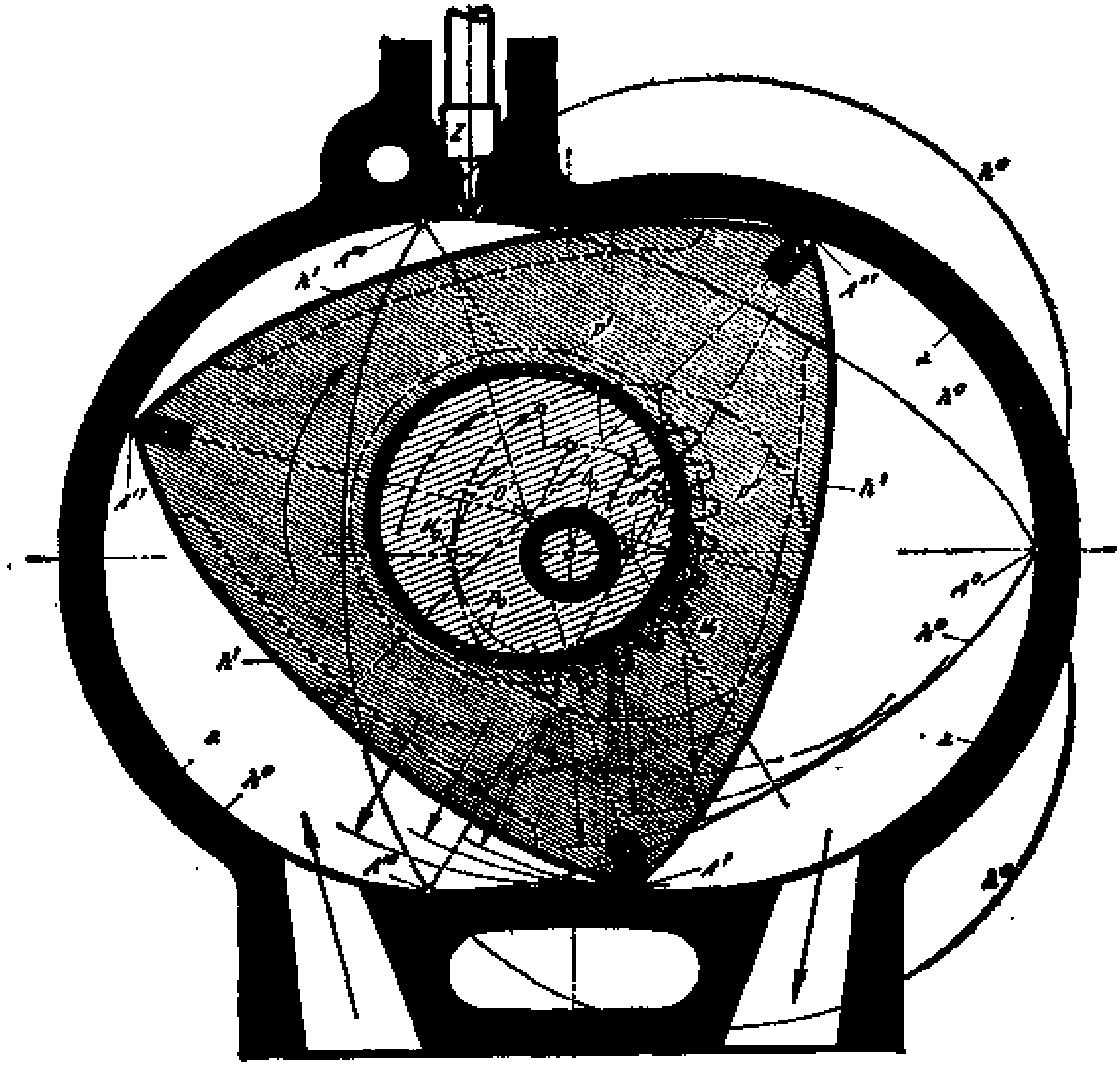
图 12.10.5.1.

页，[BLA 1] 第 150 页，[B-F] 第 15 节，以及非常精采的 [Y-B]，第 7 章.

在不少机械运动的装置上会碰到 Reuleaux 三角形；在电影放映机和投影仪中也会碰到，参看 [Y-B] 第 72 页；在 Wankel 的近代旋转发动机中也会碰到. 有关这方面内容，参看 9.14.34.6 和 [LF-AR] 第 433 页—435 页；也参看 [FA]，[FI]，[SL 1]，[SL2]. 也可参见本书第 172 页.

我们现在通过多胞形的逼近，来把公式 12.3.6 推广到任意凸集上去.

12.10.6 定理 (Steiner, Minkowski). 对于任意一个 d 维凸集 $C\in\mathscr{C}^d$，附有一个数量 $\mathfrak{L}_i(C)$ $(i=0,1,\cdots,d)$，使得 $\forall\lambda\in\mathbf{R}_+^*$，



Vandenhoeck 和 Ruprecht, «数学基本原理».

图 12.10.5.2.

$\mathfrak{L}(B(C,\lambda))=\sum_{i=0}^{d}\mathfrak{L}_i(C)\lambda^i$. 函数 $\mathfrak{L}_i$: $\mathscr{C}^\bullet\to\mathbf{R}$ 是连续的; 对于任意的 C, $\mathfrak{L}_0(C)=\mathfrak{L}(C)$, $\mathfrak{L}_1(C)=\mathfrak{A}(C)$, $\mathfrak{L}_d(C)=\beta(d)$.

设 $C=\lim_{n\to\infty}P_n$, $P_n\in\mathscr{P}^\bullet\ \forall n$; 由于 P_n 都是有界的, 12.3.7 表明, $\mathfrak{L}_i(P_n)$ 都是有界的. 抽取 (P_n) 的一个子序列, 可假定: 存在 $k_i\ (i=0,1,\cdots,d)$, 使得 $k_i=\lim_{n\to\infty}\mathfrak{L}_i(P_n)$. 故

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{L}(B(P_n,\lambda))=\sum_{i=0}^{d}k_i\lambda^i.$$

但是，根据 12.9.3.4，$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{L}(B(P_n,\lambda))=\mathfrak{L}(\lim_{n\to\infty}B(P_n,\lambda))$。可是（参见 9.11.7），

$$\lim_{n\to\infty}B(P_n,\lambda)=B(\lim_{n\to\infty}P_n,\lambda)=B(C,\lambda)$$

由此推出：

$$\mathfrak{L}(B(C,\lambda))=\sum_{i=0}^{d}k_i\lambda^i.$$

但我们知道 $\mathfrak{L}(B(C,\lambda))$ 是一个 λ 的多项式，因为函数 $\mathfrak{L}(B(C,\lambda))$ 只依赖于 C 和 λ（与 $\lim_{n\to\infty}P_n=C$ 中的 P_n 无关!），可见 k_i 只与 C 有关，这是因为我们知道，一个函数多项式决定了多项式。此外，这种决定是连续的（例如可看［CH 1］6.3.6 的所谓“逐次差分”公式），且因为 $\mathscr{C}^\bullet\times\mathbf{R}_+\ni(C,\lambda)\longmapsto\mathfrak{L}(B(C,\lambda))\in\mathbf{R}$ 是连续的，故知 $\mathfrak{L}_i$ 是连续的（参见 11.1.3.3 和 12.9.3.4）。

最后，$\mathfrak{L}_0$，$\mathfrak{L}_1$ 和 $\mathfrak{L}_d$ 之值可由 12.3.6 和这些函数的连续性得出。

现在，我们可以看出（参见 12.3.8），画一个凸集是度量其面积的一种方法。

12.10.7 推论. 对于任意的凸集 $C\in\mathscr{B}^\bullet$，

$$\mathfrak{A}(C)=\lim_{\lambda\to0}\frac{\mathfrak{L}(B(C,\lambda))-\mathfrak{L}(C)}{\lambda}.$$

12.10.8 例子. 取 $C=B(0,1)\subset\mathbf{R}^d$；

$$B(C,\lambda)=B(0,\lambda+1),\ \mathfrak{L}(B(C,\lambda))=(\lambda+1)^d\beta(d),$$

$$\mathfrak{A}(C)=\lim_{\lambda\to0}\frac{\beta(d)(\lambda+1)^d-\beta(d)}{\lambda}=d\beta(d).$$

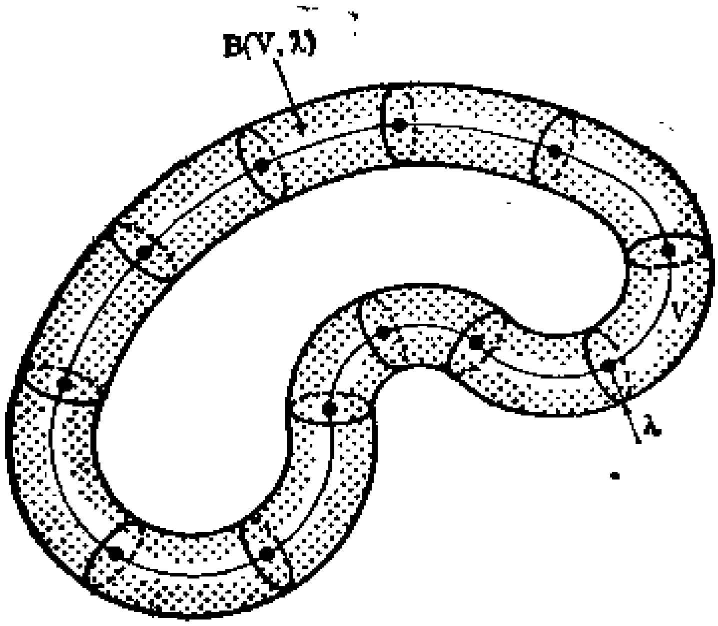
因为 $\mathfrak{A}(C)=\alpha(d)$（参见 12.10.4），这样就得到了关系式 $\alpha(d)=d\beta(d)$。

12.10.9 附注

12.10.9.1 $\mathfrak{L}_i(\cdot)$ 都是附着于紧凸集的有趣的等距不变量。当 $d=3$ 时，只有 $\mathfrak{L}_2(C)$ 对我们是陌生的，可以把它称为 C 的全平均曲率，因为我们可以证明，当 $\mathrm{Fr}\,C$ 是 X 的一个 C^2 类子流形时，$\mathfrak{L}_2(C)=\int_{\mathrm{Fr}\,C}\mu\sigma$，这里 σ 是 $\mathrm{Fr}\,C$ 的典范测度，而 μ: $\mathrm{Fr}\,C\to\mathbf{R}$

是它的平均曲率。对此，例如可看［B-F］第 63 页，公式(12)。

12.10.9.2 此外，如果 $V\subset X$ 是一个 C^2 类的子流形，我们总可定义 $B(V,\lambda)$。 在［B-G］第 253 页可看到，$\mathfrak{L}(B(V,\lambda))$



Berger 和 Gostiaux 合著《微分几何》。

图 12.10.9.1.

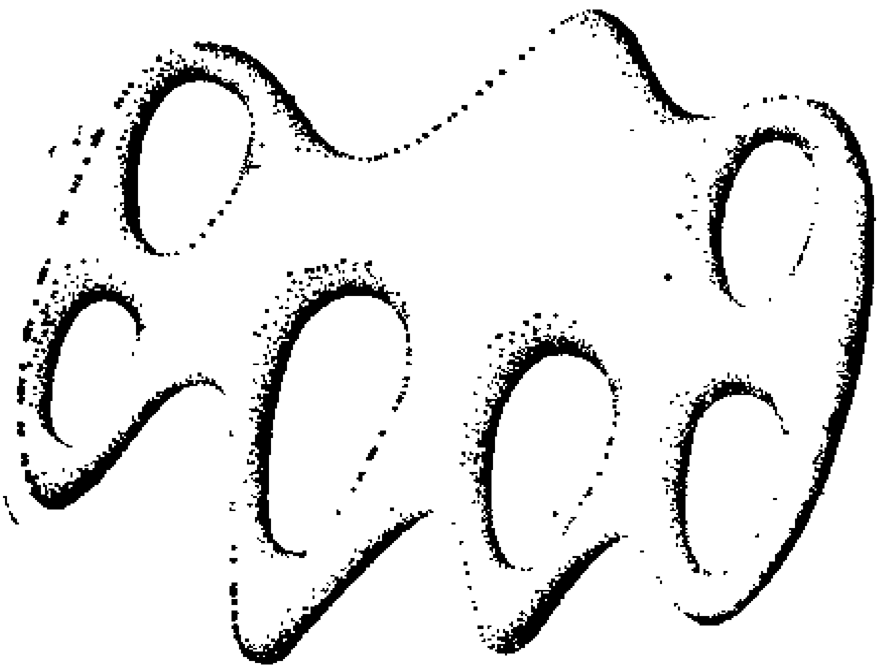


图 12.10.9.2.

是一个 λ 的多项式，但仅当 λ 足够小时是如此。事实上，对于圆 $S=S(0,1)\subset\mathbf{R}^2$，当 $\lambda\in[0,1]$ 时，有 $\mathfrak{L}(B(S,\lambda))=4\pi\lambda$；当 $\lambda\geqslant 1$ 时，$\mathfrak{L}(B(S,\lambda))=\pi(\lambda+1)^2$。此外，在 $\mathfrak{L}(B(V,\lambda))$ 内，当 λ 相当小时，λ 的幂次是 2 次一跳的，这是因为有些项抵消了。当 λ 相当小时，一个有效差就是 $\mathfrak{L}(B(V,\lambda))$ 中含 λ^d 的那些项的差；对于一个凸集，其有效差为 $\beta(d)\lambda^d$；对于一个偶数维的子流形，其有效差为 $\chi(V)\beta(d)\lambda^d$，这里 $\chi(V)$ 是 V 的 Euler-Poincaré 示性数。对于 γ 个洞的环面(图 12.10.9.2)，事实上，可求得 $\mathfrak{L}(B(V,\lambda))=2(V\text{ 的面积})\lambda+\frac{8\pi(1+\gamma)}{3}\lambda^3$（参看 [B-G] 第 288 页，并与 12.7.5.4 加以比较）。

12.10.9.3 相反地，如果 K 是无任何正则性的一个紧集，$\mathfrak{L}(B(K,\lambda))$ 将是一个性态很差的函数，即使对于很小的 λ 值也是如此，尤其是：$\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{\mathfrak{L}(B(K,\lambda))-\mathfrak{L}(K)}{\lambda}$ 一般是不存在的（参看 12.12.9）。然而，对于任意一个紧集 K，总可令：

$$\mathfrak{M}^+(K)=\limsup_{\lambda=0}\frac{\mathfrak{L}(B(K,\lambda))-\mathfrak{L}(K)}{\lambda},$$

$$\mathfrak{M}^-(K)=\liminf_{\lambda\to 0}\frac{\mathfrak{L}(B(K,\lambda))-\mathfrak{L}(K)}{\lambda},$$

分别称它们为 K 的 Minkowski 上面积和 Minkowski 下面积；有关这两种面积的性质，参看 12.11.4.2，[FR] 第 273 页，[HR] 第 185 页。

12.10.10 面积和 Steiner 对称. 沿用 9.13 和 11.1.3 中的记号。我们的目的是证明 Steiner 对称不会使凸集的面积(参阅 11.1.4)增大。

12.10.10.1 引理. 设 $A,B\in\mathscr{C}$，H 是一个超平面；则对任意的 $\lambda\in[0,1]$，

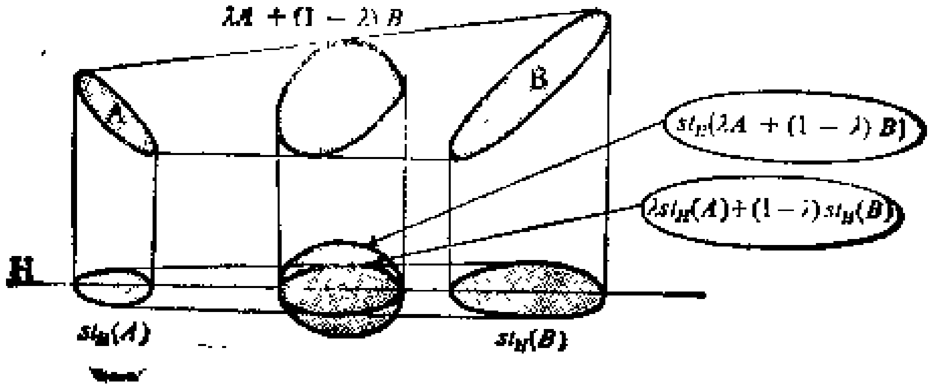
$$\mathrm{st}_H(\lambda A+(1-\lambda)B)\supset\lambda\mathrm{st}_H(A)+(1-\lambda)\mathrm{st}_H(B).$$

如果 X 还是一个间域空间，则对任意的 $\lambda,\mu\geqslant 0$，我们有

$$\mathrm{st}_H(\lambda A+\mu B)\supset\lambda\mathrm{st}_H(A)+\mu\mathrm{st}_H(B).$$

图 12.10.10.1 表明，等号一般不成立．设 $x=\lambda y+(1-\lambda)z$，$y\in\mathrm{st}_H(A)$，$z\in\mathrm{st}_H(B)$，并且 D_x，D_y，D_z 分别是经过 x，y，z 的与 H 垂直的直线，以及 $T_y=\mathrm{st}_H(A)\cap D_y$，$T_z=\mathrm{st}_H(B)\cap D_z$．设 T_y'，T_z' 分别是生成 $D_y\cap A$ 和 $D_z\cap B$ 的线段；因而 $\lambda A+(1-\lambda)B\supset\lambda T_y'+(1-\lambda)T_z'$，且根据 9.13，我们有：$\mathrm{st}_H(\lambda A+(1-\lambda)B)\supset\lambda T_y+(1-\lambda)T_z\ni x$．

对于向量的情形，可利用比值为 $(\lambda+\mu)^{-1}$ 的位似可归结为上述的情形．



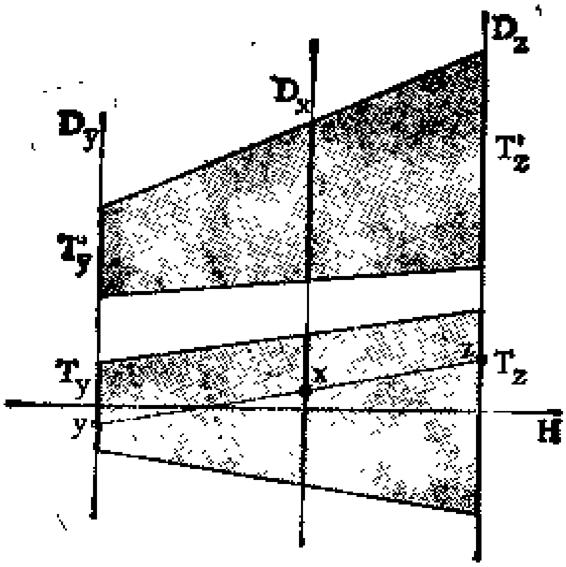


图 12.10.10.1.

12.10.10.2 命题． 对于任意的 $C\in\mathscr{C}^*$ 和超平面 H，

$$\mathfrak{A}(\mathrm{st}_H(C))\leqslant\mathfrak{A}(C).$$

在 $0\in H$ 处向量化 X，并设 $S=B(0,1)$ 是其中的单位球。根据 11.1.3.2, 12.10.7, 12.10.10.1 和 9.13.4,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(B(C,\lambda)) &= \mathfrak{L}(C)+\mathfrak{A}(C)\lambda+o(\lambda)\\ &=\mathfrak{L}(\mathrm{st}_H(B(C,\lambda))=\mathfrak{L}(\mathrm{st}_H(C+\lambda S))\\ &\geqslant \mathfrak{L}(\mathrm{st}_H(C)+\lambda\,\mathrm{st}_H(S))\\ &=\mathfrak{L}(\mathrm{st}_H(S)+\lambda S)=\mathfrak{L}(B(\mathrm{st}_H(C),\lambda))\\ &=\mathfrak{L}(\mathrm{st}_H(C))+\mathfrak{A}(\mathrm{st}_H(C))\lambda+o(\lambda)\\ &=\mathfrak{L}(C)+\mathfrak{A}(\mathrm{st}_H(C))\lambda+o(\lambda).\end{aligned}$$

由于 $\frac{o(\lambda)}{\lambda}\xrightarrow[\lambda\to 0]{}0$，故有 $\mathfrak{A}(C)\geqslant\mathfrak{A}(\mathrm{st}_H(C))$.

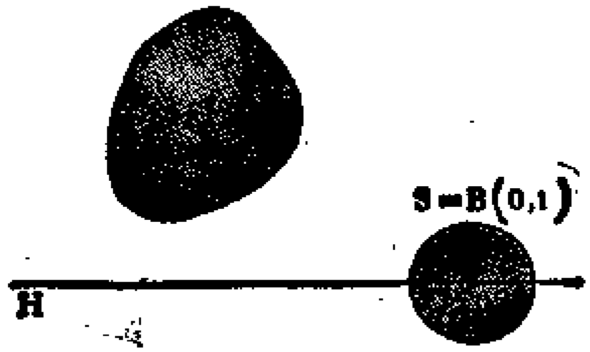


图 12.10.10.2.

读者也许要问，什么时候 12.10.10.2 中的等式成立？对于任何使 $\mathrm{st}_H(C)=C$ 的 C，或者对于这样一个 C 的任意一个平移等号必定成立。反之亦然。

12.10.10.3 定理. 如果 $C\in\mathscr{C}^{\bullet}$，且超平面 H 满足 $\mathfrak{A}(\mathrm{st}_H(C))=C$，则存在一个与 H 平行的超平面 H'，使得 $\mathrm{st}_{H'}(C)=C$。

不能采用 12.10.10.2 的证明，因为它含有取极限过程。对于 $\mathfrak{A}(C)$ 我们要利用具体表示式 12.10.11.1；对于已给的 H 和 C，采用 12.10.11.1 中的记号。依 $\mathrm{st}_H(.)$ 的定义，如果 C 是由序对 $\{f,g\}$ 定义的，则 $\mathrm{st}_H(C)$ 由序对 $\left\{\frac{f-g}{2},\frac{g-f}{2}\right\}$ 定义，且有

$$\mathfrak{A}(C)=\int_{\mathrm{Fr}D}(f-g)\sigma+\int_D\left(\sqrt{1+\|f'\|^2}+\sqrt{1+\|g'\|^2}\right)\mu,$$

$$\mathfrak{A}(\mathrm{st}_H(C)) = \int_{\mathrm{Fr}D}(f-g)\sigma + \int_D 2\sqrt{1+\frac{\|f'-g'\|^2}{4}}\,\mu.$$

然而，对于欧几里得空间的任意一个向量序对 $\{\xi,\eta\}$ 从 8.1.2.4 和 8.1.3 可推出：

$$\sqrt{1+\|\xi\|^2}+\sqrt{1+\|\eta\|^2}\geqslant\sqrt{4+\|\xi-\eta\|^2},$$

等号仅当 $\eta=-\xi$ 时才成立。

于是，几乎处处有 $f'=-g'$. 因为 $f+g$ 是连续的，故有 $f+g=$ 常数；定理得证。

12.10.11 面积的具体计算. 设 $C\in\mathscr{C}^\bullet$，且 H 是 X 的一个超平面. 分解 X 为一个乘积：$X=H\times\mathbf{R}$（其实是一个同构）. 我们称 $p: X\to H$ 是到 H 上的投影. 令 $D=p(C)$. 记 μ 为 H 上的 Lebesgue 测度，则有：

12.10.11.1 定理. 存在一个 $\mathrm{Fr}\,D$ 上的测度 σ，和两个函数 $f,g: D\to\mathbf{R}$，使得

(i) f,g 在 D 上是几乎处处可微的. 并且 $\sqrt{1+\|f'\|^2}$，$\sqrt{1+\|g'\|^2}$ 对 μ 是可积的（这里的范数是 8.1.8.2 中定义的 $(\vec{H})^*$ 上的范数）.

(ii) 有 $C=\{(x,t)\in H\times\mathbf{R}: x\in D, f(x)\geqslant t\geqslant g(x)\}$.

(iii) 有

$$\mathfrak{A}(C)=\int_{\mathrm{Fr}D}(f-g)\sigma+\int_D\left(\sqrt{1+\|f'\|^2}+\sqrt{1+\|g'\|^2}\right)\mu.$$

证明是技巧性很强的，我们只给出证明的关键之处. 函数 f，g 可通过图 12.3.3，图 12.10.11 和 12.3.3.1 的证明而明确地在 $\mathring{D}$ 上定义. 由于 C 的凸性和紧性，可以把 f,g 唯一地延拓到整个 D 上，从 11.8.10.5 和 11.8.3 则可推出它们是几乎处处可微的.

现在可注意到，从 9.12.4.9 可知，如果我们再取 D 的各个面上的诱导 Lebesgue 测度的并作为 $\mathrm{Fr}\,D$ 上的测度 σ，则定理对多胞形也成立. 于是，我们可应用 12.9.23 和积分理论中的收敛定理.

12.10.11.2 推论. 设 $C\in\mathscr{C}^\bullet(X)$，并假定 $\mathrm{Fr}\,C$ 容有一个有限剖分，剖分为维数为 $0,1,\cdots,d-1$（这里 d 是 X 的维数）的 X

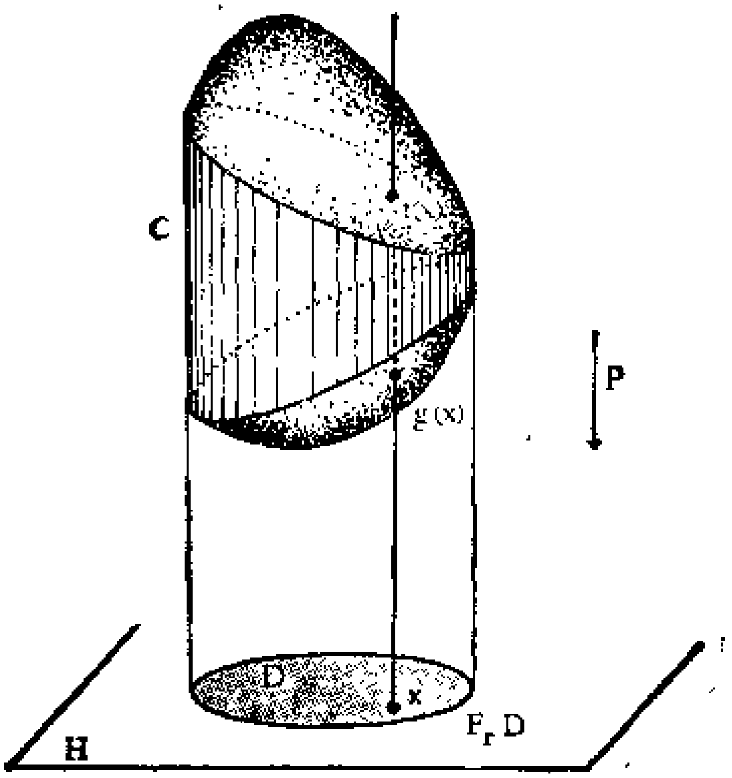


图 12.10.11.1.

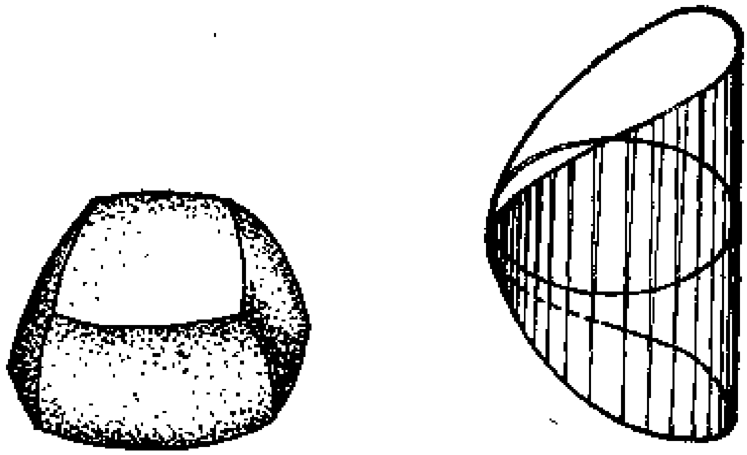


图 12.10.11.2.

的可微子流形．则此剖分的每一个 $d-1$ 维子流形的体积是有限的（在［B-G］第 225 页的意义下），并且 $\mathfrak{A}(C)$ 是全体 $d-1$ 维子流形体积之和．

这是 12.10.1.1 以及［B-G］中公式 6.4.2.3 在任意维情形下的推广公式的一个直接推论．事实上，如果图是 $g:(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto$

$(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n))$，则有 $|g^*\omega| = \left\|\frac{\partial g}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial g}{\partial x_n}\right\| \cdot$ $\|dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n\|$. 但 8.11.11 表明 $\frac{\partial g}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial g}{\partial x_n}$ 的坐标是

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1\right).$$

上面的推论使我们有可能去计算在物理世界中所遇到的一些凸的紧集的面积，例如可用 [B-G] 中的 6.6.2，可参看 12.12.20 中的一个公式。

12.11 等周不等式

下述定理是简单而基本的；它称为等周不等式，有一段悠久而有趣的历史，对此我们介绍读者参看一本阐述完整的文献 [PR]. 也可参阅 [BLA 1] 第 79—82 页. 最重要的一点是，从 Steiner 基本思想出发，在历史上是经过相继多次试验，才最后得到一个严格的完全的证明的.

12.11.1 定理. 对于 X 的内部非空的任意一个 d 维凸集，我们有

$$\mathfrak{A}(C) \geqslant d(\beta(d))^{1/d} \cdot \mathfrak{L}(C)^{(d-1)/d}, \text{ 或 } \frac{\mathfrak{A}(C)}{\alpha(d)} \geqslant \left(\frac{\mathfrak{L}(C)}{\beta(d)}\right)^{(d-1)/d}.$$

如果 C 是一个球，则等号成立. 反之，如果等号成立，则 C 必是一个球.

换言之，"在体积给定的所有内部非空的紧凸集中，以球的面积最小"；或者说，"在面积给定的这种凸集中，以球的体积最大". 并且，这是唯一的. 两个不等式的等价性可从 9.12.4.8 或 12.10.8 推出. 我们将给出等周不等式的两种证明；第一种证法还证明了只有对球面等号才能成立.

12.11.2 第一种证明. 本证明是以 Steiner 和 Kugelungsatz 的对称作为基础的. 设给定凸紧集 $C \in \mathscr{C}^\bullet$，引入

$$\mathscr{F} = \{F \in \mathscr{C}^\bullet : \mathfrak{L}(F) = \mathfrak{L}(C) \text{ 且 } \mathfrak{A}(F) \leqslant \mathfrak{A}(C)\}.$$

$\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{C}$ 的闭集；这是因为，如果 $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$，其中 $A \in \mathscr{C}$ 且 $A_n \in \mathscr{F}\ \forall n$，则有 $\mathfrak{L}(A_n) = \mathfrak{L}(C) \neq 0$，因而 $A_n \in \mathscr{C}^\bullet$，又根据 12.9.3.4 有 $\mathfrak{L}(A) = \mathfrak{L}(C) \neq 0$．因而 $A \in \mathscr{C}^\bullet$．但这时，根据 12.10.2 有 $\mathfrak{A}(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{A}(A_n) \leqslant \mathfrak{A}(C)$，从而 $A \in \mathscr{F}$．此外，根据 9.13.4 和 12.10.10.2 可知，$\mathscr{F}$ 对于 Steiner 对称是稳定的．于是，我们可以应用 9.13.6：存在一个球 $B(a, r) \in \mathscr{F}$，$a \in X$ 和 $r > 0$；因而

$$\mathfrak{A}(C) \geqslant \mathfrak{A}(B(a, r)) = \alpha(d) r^{d-1},$$
$$\mathfrak{L}(C) = \mathfrak{L}(B(a, r)) = \beta(d) r^d.$$

如果等号成立，根据 12.10.10.3，对于任一超平面方向 ξ，存在一个超平面 H，使得 $\mathrm{st}_H(C) = C$．根据 st_H 的定义，这意味着 $\sigma_H(C) = C$，这时它就必得经过 X 的一个固定点 a（参见 9.8.6）．最后，C 在正交群 $O(X_a)$ 下应该是不变的，故它是一个球．

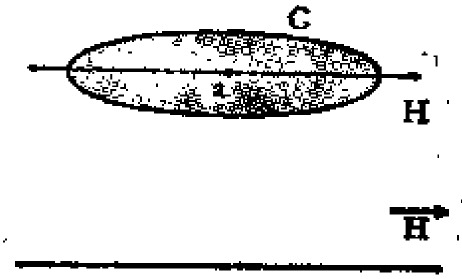


图 12.11.2.

12.11.3 第二种证明． 本证明是以 Brunn-Minkowski 定理以及面积是一个（Steiner-Minkowski）导数这一事实作为基础的．设 $C \in \mathscr{C}^\bullet$：在任意一点 0 处向量化 X，并令 $S = B(0, 1)$．于是，$B(C, \lambda) = C + \lambda S$（参见 11.1.3.2）．

根据 11.8.8.5 和二项式公式：

$$\mathfrak{L}(B(C, \lambda)) = \mathfrak{L}(C + \lambda S) \geqslant [(\mathfrak{L}(C))^{1/d} + \lambda(\beta(d))^{1/d}]^d$$
$$\geqslant \mathfrak{L}(C) + d\mathfrak{L}(C)^{(d-1)/d}(\beta(d))^{1/d}\lambda.$$

由此，根据 12.10.7 即可推出 12.11.1．

12.11.4 附注

12.11.4.1 尽管在 11.8.8.6 中已经不加证明地下了断言，但我们利用 12.11.3 的技巧仍是不能证明等号只对球成立的；因为事实上，我们的证明中有求极限的过程。

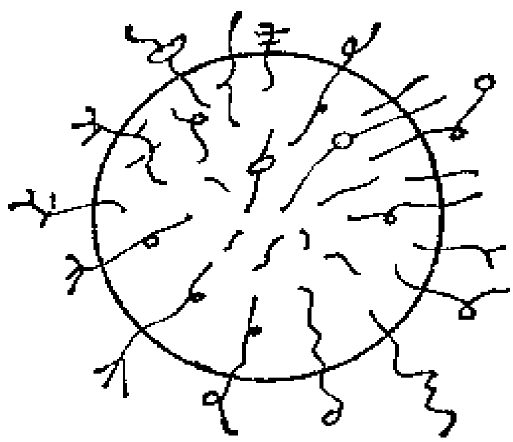


图 12.11.4.

12.11.4.2 对于比凸集更为一般的紧集，等周不等式是不是仍能成立呢？第二种证明表明：对于任意一个紧集，如果我们取 12.10.9.3 中的 $\mathfrak{M}^-(.)$ 作为面积，则答案是肯定的；对任意一个紧集 K，恒有

$$\mathfrak{M}^-(K) \geqslant d(\beta(d))^{1/d}\mathfrak{L}(K)^{(d-1)/d}.$$

但若除去凸性或边界正则性的条件，则对不是球的其它紧集，等号也能成立：只要取 $d \geqslant 3$ 维时的一个球，在上面添上一些头发或草，也就是说添上一些曲线就可以了；这时我们容易验证：体积、面积是不会改变的。当 $d = 2$ 时，情况就不一样了：细发和草是有长度的！参看图 11.6。

12.11.4.3 在不是欧几里得仿射空间的其它空间，确切地说，在 18 章和 19 章将要讨论的球面或双曲空间中，存在一个推广 12.11.1 的不等式。12.11.1 之所以在这些空间中仍然成立，是因为它们容有跟欧几里得空间同样多的超平面和关于这些超平面的对称，因此 Kugelungsatz 定理仍然成立。关于这些推广的证明，参看［HR］第 304 页中关于 E. Schmidt 和 A. D. Alexandrov 的评价。

12.11.4.4 在 $d = 2$ 的情形，对于边界为可微曲线的凸集，12.11.1 的证明可用很初等的方法作出，例如可参看［B-G］第 345 页。对于二维的任意凸集，可参看下文。当 $d \geqslant 3$ 时，情况更困难，原因有好几个：首先，面积的概念比曲线长度的概念更复杂（参见 9.12.7）。其次，不等式本身不再象 $d = 2$ 时那样是二次型．而我们知道，这样的不等式总是在二次型的情形比较容易证明的，

例如，比较 Cauchy-Schwartz 不等式和 Hölder 不等式，也可参看例如 11.8.11.9.

12.11.5　二维的情形. 对于二维情形，不必一定要求有凸性，参见 12.11.4.2。我们将得到一个更一般的定理。

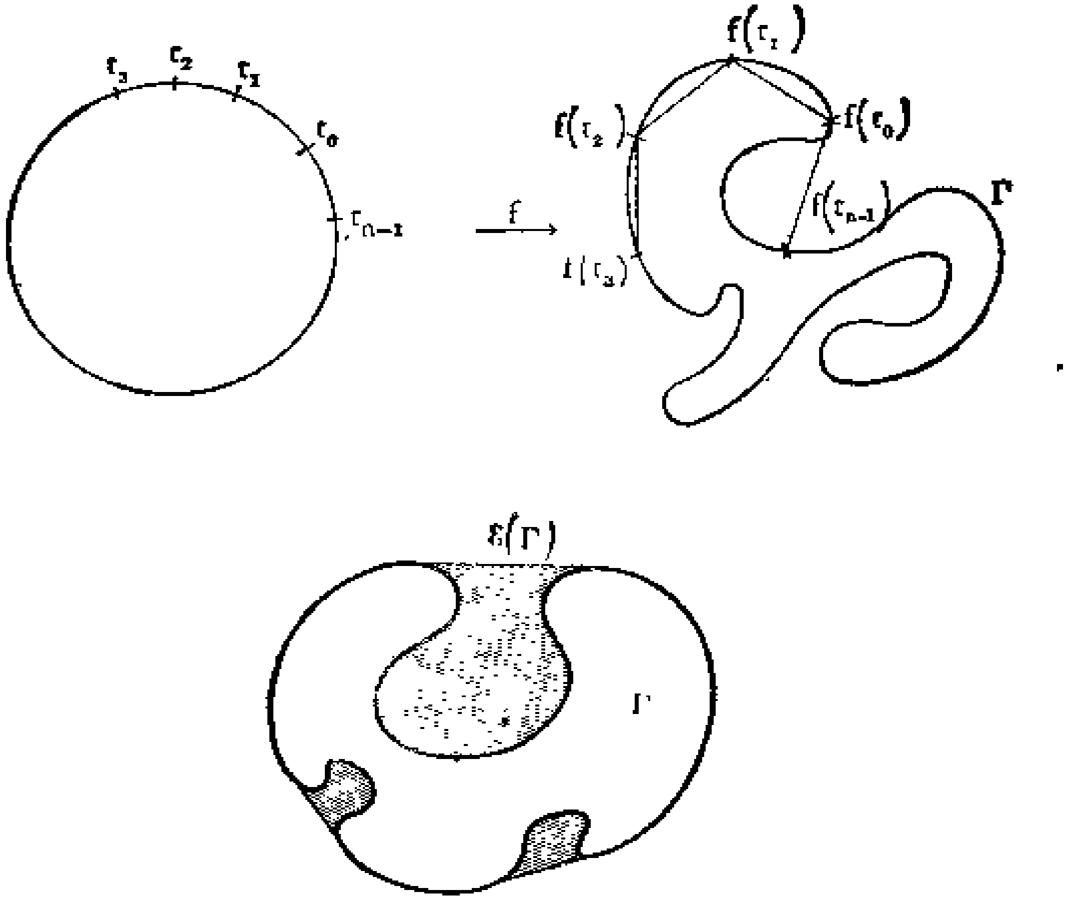


图　12.11.5.

12.11.5.1　定义. 在一个拓扑空间 X 中，若对任一子集 $\Gamma\subset X$，存在 $f: S^1\to X$ 使得 f 是圆 S^1 到象集 $f(S^1)=\Gamma$ 上的一个同胚，则称 Γ 是简单闭曲线. 若再设 X 是一个度量空间，并在 S^1 上取点列 $(t_i)_{i=0,1,\cdots,n}$，使 $t_0=t_n$ 且 $\forall i$，t_i 在 t_{i-1} 和 t_{i+1} 之间(参见 9.9.8)．则对 $f: S^1\to X$ 可有和式 $\sum_{i=0}^{n-1} d(f(t_i), f(t_{i+1}))$ 与之相应. 只要知道圆 S^1 上的同胚保持“在…之间”的关系式，那么如 9.9.2 中那样，这些和的上确界只依赖于该简单闭曲线 Γ，这一结论从作为连续

双射的数值函数是严格单调的这一事实即可推出.

如果此和的上确界是有限数，则称 Γ 是可求长的，并称此数为 Γ 的长度，记作 long (Γ).

12.11.5.2 现在假定 X 是一个欧几里得平面；则当 $C\in\mathscr{C}^{\bullet}$ 时，它的边界 $\Gamma=\operatorname{Fr} C$ 是一条简单闭曲线，并且 long $(\Gamma)=\mathfrak{A}(C)$，参看 12.10.4.2。如果 Γ 是一条简单闭曲线，则它的凸包络 $\mathscr{E}(C)\in\mathscr{C}^{\bullet}$，并且由图形可以看出 long $(\Gamma)\geqslant\mathfrak{A}(\mathscr{E}(\Gamma))$.

12.11.6 **定理**. 对于欧几里得平面中任意一条简单闭曲线，我们有 long $(\Gamma)\geqslant 2\sqrt{\pi}\,(\mathfrak{L}(\mathscr{E}(\Gamma)))^{1/2}$；等号当且仅当 Γ 是一个圆时成立.

根据 12.11.1 和 12.11.5.2，long $(\Gamma)\geqslant\mathfrak{A}(\mathscr{E}(\Gamma))\geqslant 2\sqrt{\pi}\cdot(\mathfrak{L}(\mathscr{E}(\Gamma)))^{1/2}$. 还须证明的是，如果等号成立，则 Γ 是一个圆. 设 $C=\mathscr{E}(\Gamma)$ 使等号成立，则根据 12.11.5.2，$\Gamma=\operatorname{Fr} C$. 固定 $x\in\Gamma$；由连续性可见，存在 $y\in\Gamma$，使得两条曲线 $\Gamma_1=\operatorname{Fr} C_1$，$\Gamma_2=\operatorname{Fr} C_2$

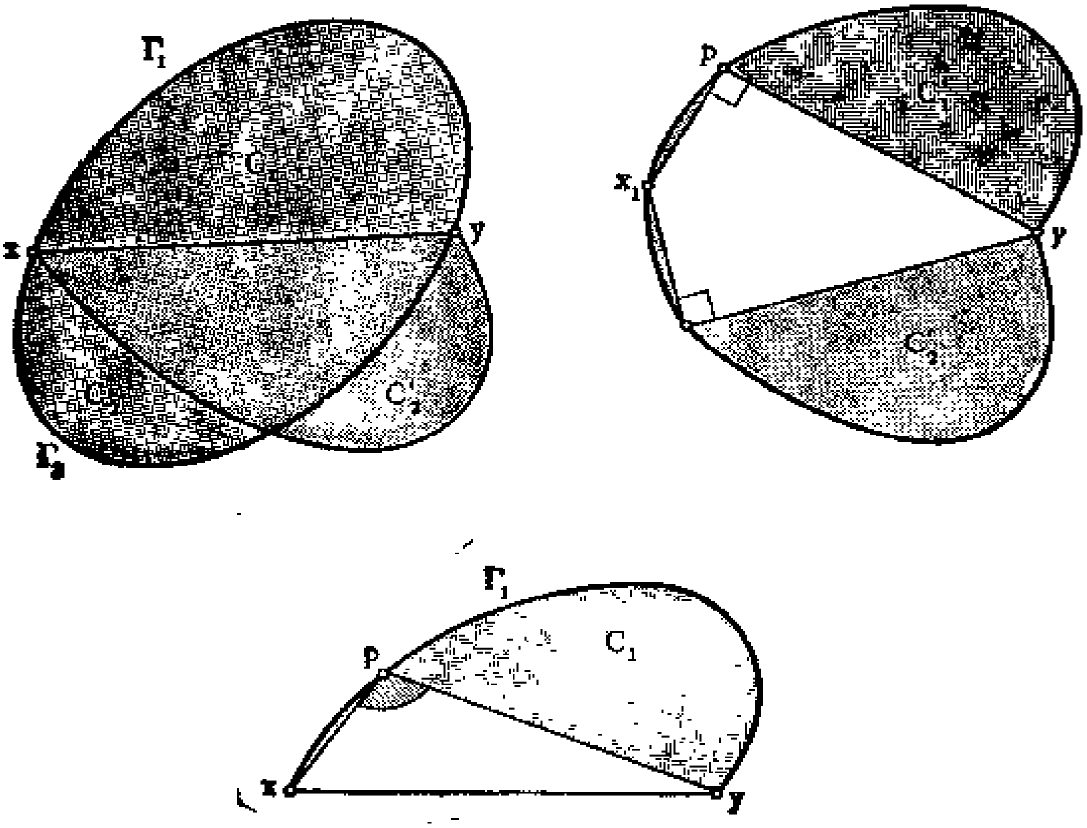


图 12.11.6.

满足 $\log(\Gamma_1)=\log(\Gamma_2)$，这里 C_1，C_2 分别是 C 与 $\langle x, y\rangle$ 所决定的两个半平面的交集。

首先证明 $\mathfrak{L}(C_1)=\mathfrak{L}(C_2)$；如若不然，若 $\mathfrak{L}(C_1)<\mathfrak{L}(C_2)$，则利用关于 $\langle x, y\rangle$ 的对称，可构作 C_2' 使得：

$$\mathfrak{L}(\mathscr{E}(C_1\cup C_2'))\geqslant\mathfrak{L}(C_1\cup C_2)=\mathfrak{L}(C_1)+\mathfrak{L}(C_2')>\mathfrak{L}(C),$$

$$\mathfrak{A}(\mathscr{E}(C_1\cup C_2'))\leqslant\mathfrak{A}(C_1)+\mathfrak{A}(C_2)=\mathfrak{A}(C).$$

与定理的已证部分矛盾。

最后，证明 C_1（C_2 也一样）是直径为 $\{x, y\}$ 的一个半圆。换言之，$\forall p\in\Gamma_1$，$\langle p, x\rangle\perp\langle p, y\rangle$。用反证法。假设有 $p\in\Gamma_1$，使得 $\langle p, x\rangle$ 不与 $\langle p, y\rangle$ 垂直。把图 12.11.6 中有阴影的扇形绕 p 作旋转，直至 $\langle p, x_1\rangle$ 与 $\langle p, y\rangle$ 正交为止。根据公式 10.3.3，三角形 $\{p, x_1, y\}$ 的面积严格地大于三角形 $\{p, x, y\}$ 的面积，因而可以通过关于 $\langle x, y\rangle$ 的对称构作一个紧集 $C_1'\cup C_2'$，使得 $\mathfrak{L}(C_1'\cup C_2')>\mathfrak{L}(C)$ 以及 $\log(\mathscr{E}(C_1'\cup C_2'))=\log(\operatorname{Fr} C)$。这样就得出矛盾。

上面的证法还证明了下述的推论，这个推论是属于 Didon 的。Didon 是 Tyr 的国王的女儿，她同其姑父 Acerbas 结婚。Acerbas 因财宝而惨遭杀害，Didon 带着 Acerbas 的财宝逃到塞浦路斯，再从那里到非洲，地点靠近西西里岛。她向当地长官表明：她想买下海边的一块地皮，大小是一块牛皮所能围成的那块地。那位长官同意了她的要求，并给了她一张很大的牛皮。Didon 把牛皮割成很细的狭长带子，然后把它们接成一个长绳子；这时，她要解决的就是下述问题：

12.11.7　推论. 设 R 是欧几里得平面中的一个半平面。Φ 是一条长度已知的线；若把此线放在 R 上，使得线的两端 $x, y\in\operatorname{Fr} R$，则当 Φ 是以 $\{x, y\}$ 为直径的一个半圆时，Φ 所围成的面积为最大。



图　12.11.7.

这下，迦太基人可有根据了！

12.11.8 其它不等式

12.11.8.1 在 9.13.8 中我们已经遇到过一个与 12.11.1 不同的不等式，读者会料想得到，数学家由于经常受到物理学家的猜想的推动，所以当然已经证明了许多这种类型的不等式。一本很出色的参考书是 [P-S]。其它还有 [PN]，[HR]，[BLA1]，[B-F]，[HS]，[GS]。最后可看 Kohler-Jobin, Comptes Rendus Aca. Sci, Paris, 281 (1976), 119 和 284 (1977), 917。

下面给出这方面的一些例子：

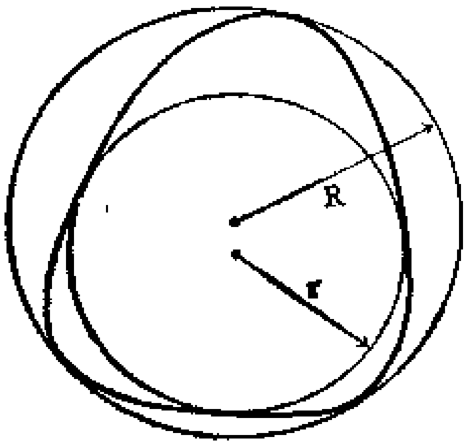


图 12.11.8.

12.11.8.2 如同在 12.10.5 一样，我们可以先对一类特殊的凸集研究等周问题。第一种情形是 n 边多边形，n 为固定常数。这时：在周长给定的 n 边多边形中，正多边形具有最大的面积，且它是唯一的，参阅 12.12.16，或 [GR] 第 191 页或 [FT 1] 第 9 页。

对于多胞形，问题可不是那么简单了；Lindelöf 定理指出：在体积给定、其各面方向也给定的三维多胞形中，以内接于一个球面的多胞形面积最小。参看 [AV] 第 317 页或 [HR] 第 276 页。

12.11.8.3 另一个方向是研究亏差

$$\mathfrak{A}(C)-d(\beta(d))^{1/d}\mathfrak{L}(C)^{(d-1)/d}.$$

当两个量不相等时，作为数学家有一个原则，那就是研究它们的差是好还是坏。在一般情况下，我们的结果很少。若记 $r(C)$ 为内切于 C 的球面的最大半径(参见 11.9.12)，即 C 的内半径，则恒有 (Dinghas-Hadwiger-Bonnesen 定理)：

$$(\mathfrak{A}(C))^d-d^d\beta(d)\mathfrak{L}(C)^{d-1}\geqslant[(\mathfrak{A}(C))^{1/(d-1)}-(d\beta(d))^{1/(d-1)}r(C)]^{d(d-1)}.$$

参看[HR]第 269 页. 证明的技巧是很有趣的：其中引入了内凸集 $C(t)$ 和与C 的距离为 t 的所谓"C 的平行集". 12.10.7 表明 $\mathfrak{L}(C(t))$ 是可导的，以及 $\frac{d(\mathfrak{L}(C(t)))}{dt} = -\mathfrak{A}(C(t))$. 在 12.12.16 里我们将找到一个特殊的情形. 平行内凸集的概念最近在[C-G]中已被作为重要的手段而应用.

12.11.8.4 相反地，对平面的情形，关于亏差有许多解释. 最有趣的是 Bonnesen 定理：如果 $R(C)$ 是C 的外半径(即含C 的球半径的下确界，参见 11.5.8)，则恒有：

$$(\mathfrak{A}(C))^2 - 4\pi\mathfrak{L}(C) \geqslant \pi^2(R(C) - r(C))^2$$

(这里 $r(C)$ 依然是C 的内半径). 对此，可看 12.12.15，或者[EN]第 108 页，或[DE 6]第 327—328 页. 我们注意到这个不等式蕴涵 12.11.8.3 中的不等式. 也可看：Robert Osserman, Bonnesen-style Isoperimetric Inequalities (预印本，Warwich University, Coventry).

在[DE 6]第 327 页练习 6 中，将亏差作为一个序列进行了具体的计算，该序列的每一项都有其几何解释；而 Bonnesen 不等式正是忽略不计高阶项而得的. 亏差的另一种计算是以 Fourier 级数作为基础的，它自然要涉及到坐标是两个周期函数的平面简单闭曲线的研究；参看 12.12.12，或[HZ].

看来，目前还不能对维数 $d \geqslant 3$ 时的等周不等式给出一个基于球面调和函数的简单证明，用以代替 $d = 2$ 的平面情形的 Fourier 级数.

12.11.8.5 [DE 6]第 327—328 页中的证明是建立在"积分几何"的基础上的. 对于这一有趣的分支，除参阅[DE 6]第 327—328 页外，还可看[HR]第 6 章，[SO]，[FR]第 173 页. 也可看重要文献[G-V-G]和一本最新的文献[RO].

12.11.8.6 关于紧凸集上的推广 Cauchy 公式和 Steiner-Minkowski 公式，可研究[DE 5]第 175—176 页，或者[HR]，[B-F]，[BLA 1].

12.12 练　　习

12.12.1 证明一个多胞形的 Steiner 对称仍是一个多胞形。

12.12.2 证明如果 E 是一个椭球体，且 $O\in\mathring{E}$ 在欧几里得向量空间 X 内，则 E 的配极 E^* 是一个椭球体，且有 $O\in\widehat{E^*}$，并且，它们的体积满足：$\mathfrak{L}(E)\mathfrak{L}(E^*)\geqslant(\beta(d))^2$，等号当且仅当 O 是 E 的中心时成立。

12.12.3 证明 12.2.4。

12.12.4 验证 12.4.6 中五边形的做法的正确性。

12.12.5 **Dowker 定理**。已给平面上一个内部非空的紧凸集，对任一整数 $n\geqslant 3$，记 T_n 为内接于 C 的 n 边形的面积的最大值，U_n 为外切于 C 的 n 边形的面积的最小值。证明序列 T_n 是凹的，而序列 U_n 是凸的，即 $\forall n$ 有 $T_n+T_{n+2}\leqslant 2T_{n+1}$ 和 $U_n+U_{n+2}\geqslant 2U_{n+1}$。

12.12.6 对于每一个正多胞形，计算(可能是作为外切球半径 R 的函数)：

——k 维面个数 $(k=0,1,\cdots,d-1)$；

——一个 k 维面的体积；

——两个相邻面的二面角。

12.12.7 **正多胞形的其它定义**。证明下面两种用归纳法所作的定义都是跟正多胞形的定义等价的：

(i) d 维多胞形 P 称为正多胞形，是指它的所有的面都是彼此等距的 $d-1$ 维正多胞形，并且所有的二面角相等。

(ii) d 维多胞形 P 称为正多胞形，是指它的所有的面是 $d-1$ 维正多胞形，并且，对 P 的任意一个顶点 x，P 的含 x 的棱的另一端点都属于同一个超平面，并在此超平面内构成一个 $d-1$ 维正多胞形。

12.12.8 定义星形正多胞形，并予以分类，参见 12.6.10.5。

12.12.9 给出满足下列条件的紧集 K 的例子：当 $\lambda\to 0$ 时，

$\frac{\mathfrak{L}(B(K,\lambda))-\mathfrak{L}(K)}{\lambda}$ 的极限不存在。 当 K 是 9.9.3.3 中的不可求长的曲线时，此式又会怎样？

12.12.10 对于三维空间中一个正多胞形，证明它的群的基数等于其棱数的 4 倍。

12.12.11 设已给整数 $n \geqslant 3$，而且 P 是一个凸 n 边形。$r(p)$ 和 $R(P)$ 分别是它的内半径和外半径(参见 12.11.8)，证明：

$$n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} (r(P))^2 \leqslant \mathfrak{L}(P) \leqslant \frac{1}{2} n \sin \frac{\pi}{n} (R(P))^2,$$

$$2n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} r(P) \leqslant \mathfrak{A}(P) \leqslant 2n \sin \frac{\pi}{n} R(P).$$

等号当且仅当 P 是正 n 边形时成立(参见 [FT 1] 第 6 页)。

12.12.12 设 C 是平面上一个紧凸集。如果一个凸 n 边形 P 内接于 C 且面积取最大值，则有：

$$\mathfrak{L}(P) \geqslant \frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n} \mathfrak{L}(C).$$

等号当且仅当 $\operatorname{Fr} C$ 是一个椭圆时成立（将边界写成 $t \longmapsto (\cos t, e(t)\sin t)$ 的形式，这里 e 是一个以 2π 为周期的函数。对于等式，要用到 Fourier 级数)(参见 [FT 1] 第 36 页)。

12.12.13 在已知圆上有 n 个点 $(a_i)_{i=1,\cdots,n}$，n 是给定的。证明函数 $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{a_i a_j}$ 当且仅当这些点形成一个正多边形时取最大值。

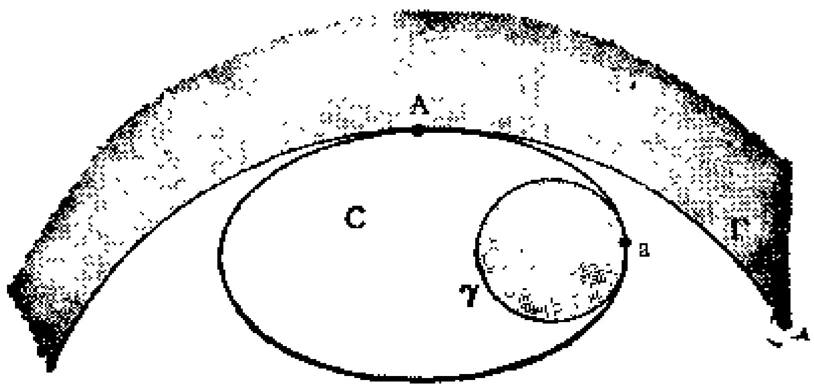


图 12.12.13.

12.12.14 Blaschke 滚动定理. 设C是平面上一个凸的紧集，它的边界是一条 C^2 类曲线，并且是双正则的（参见 [B-G] 第 309 页）. 设点 A 和 a 都属于 $\mathrm{Fr}\,C$，并且在 A 和 a 点处曲率分别取最小值和最大值. 证明 $\mathrm{Fr}\,C$ 在 a 点的密切圆 γ 可在整个 $\mathrm{Fr}\,C$ 的内部滚动. 并且，$\mathrm{Fr}\,C$ 可在整个 Γ 的内部滚动，这里 Γ 是 $\mathrm{Fr}\,C$ 在 A 点的密切圆. 如果用含在C内的半径为最大的圆代替 γ 或用包含C的半径为最小的圆代替 Γ，上述结论是否仍然成立？（需要时可参见 [BLA 1] 第 116 页）.

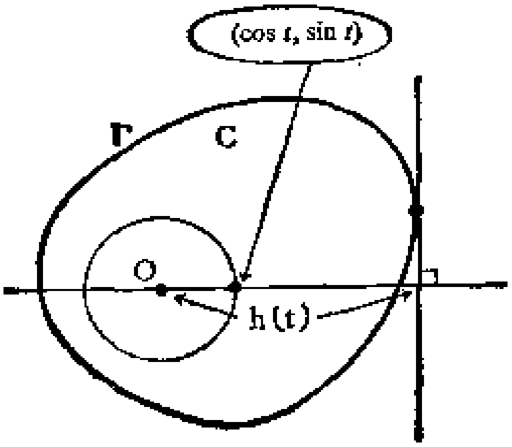


图 12.12.14.

12.12.15 Euler 方程的应用. Bonnesen 定理. 设C是平面上一个凸的紧集，其边界 Γ 是 C^2 类的. 在C内取定一个以 O 为原点的正交标架，设 $h(t)$ 是从 O 到 Γ 的这样一条切线的距离：这条切线与向量 $(\cos t, \sin t)$ $(t\in \mathbf{R})$ 正交，并使得 $(\cos t, \sin t)$ 和C在此切线所决定的同一个半平面内（参见支撑函数，11.8.12.3）. 证明 h 是 C^2 类的. 借助于 2π 为周期的函数 h: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，计算 Γ 的长度、曲率和C的面积.

设 C' 是与C相同类型的另一个凸集. 假定 $\forall m\in\Gamma$ 和 $m'\in\Gamma'$，存在一个平移 f，使得 $f(m)=m'$，f(Γ 在 m 点的切线) $=\Gamma'$ 在 m' 点的切线，$f(C)\subset C'$. 证明

$$\mathfrak{A}(C)\mathfrak{A}(C')\leqslant 2\pi(\mathfrak{L}(C)+\mathfrak{L}(C')).$$

并从而推出 Bonnesen 不等式：如果 $r(C)$，$R(C)$ 是C的内半径和外半径(参见 12.11.8.4)，则

$$(\mathfrak{A}(C))^2-4\pi\mathfrak{L}(C)\geqslant \pi^2(R(C)-r(C))^2.$$

12.12.16 关于多边形的等周不等式. 设 P 是一个凸多边形；P' 是一个外切于单位圆的凸多边形，并且 P' 的边和 P 的边是平行的. 证明 Lhuillier 不等式：

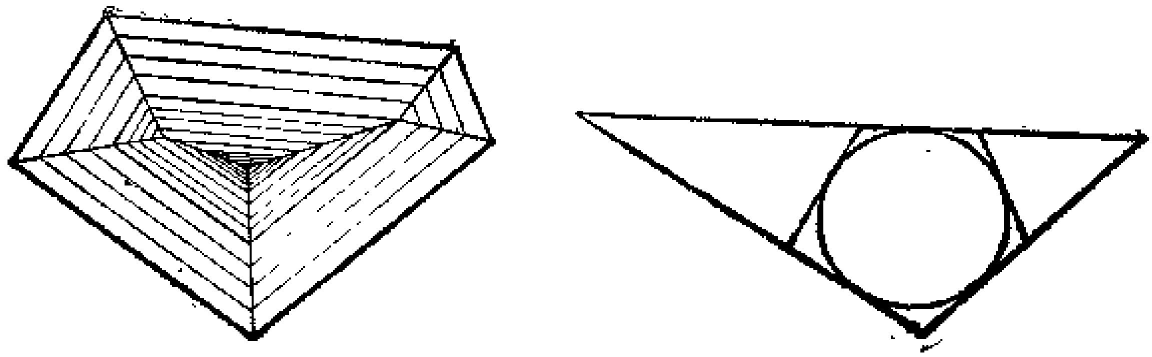


图 12.12.16.

$$(\mathfrak{A}(P))^2 \geqslant 4\mathfrak{L}(P)\mathfrak{L}(P^*).$$

为证明这一结论，根据图 12.12.16，我们考虑一族位于 P 内部的多边形 $P(t)$，它们的边都与 P 平行，且与 P 相距 t. 我们要证明，对于任意一个适当的 t，$\mathfrak{L}(P)=\mathfrak{L}(P(t))+t\mathfrak{A}(P(t))+t^2\mathfrak{L}(P^*)$，$\mathfrak{A}(P)=\mathfrak{A}(P(t))+2t\mathfrak{L}(P^*)$. 由此可推出：

$$\mathfrak{L}(P(t))=t^2\mathfrak{L}(P^*)-t\mathfrak{A}(P)+\mathfrak{L}(P).$$

证明：$(\mathfrak{A}(P))^2-4\mathfrak{L}(P)\mathfrak{L}(P^*)\geqslant(\mathfrak{A}(P)-2\mathfrak{L}(P^*)r(P))^2$，这里 $r(P)$ 表示 P 的内半径. 试与 12.11.8.4 比较.

证明：周长给定的 n 边形中，仅有正多边形取到最大面积（先归结为一个圆的内接多边形的情形）.

12.12.17 对 [R-C2] 中第 234—236 页作评论性的研究.

12.12.18 设 $C\in\mathscr{C}'$，对于其内、外半径 $r(C)$ 和 $R(C)$，证明：

$$d\frac{\mathfrak{L}(C)}{R(C)}\leqslant\mathfrak{A}(C)\leqslant d\frac{\mathfrak{L}(C)}{r(C)}.$$

讨论取等号的情形.

12.12.19 证明：$\int_{\xi\in S}|(\xi|u)|\sigma=2\beta(d-1)$（参见 12.3.3.2）

12.12.20 面积和体积公式

12.12.20.1 计算内摆线和外摆线 9.14.34 的长度和面积.

12.12.20.2 计算球带，即 $\mathbf{R}^3$ 中一个球面夹在两个平行平面之间的部分的体积和面积. 特别，球带的侧面积只依赖于这两个平行平面间的距离.

12.12.20.3 计算两个有相同半径 r 的且轴相交成 α 角的圆柱面所夹部分的体积.

12.12.20.4 计算一个旋转抛物面与一个不与其旋转轴平行的平面所围成的紧集的体积.

12.12.20.5 计算一个圆柱劈锥的体积和侧面积，见图 12.12.20.5.

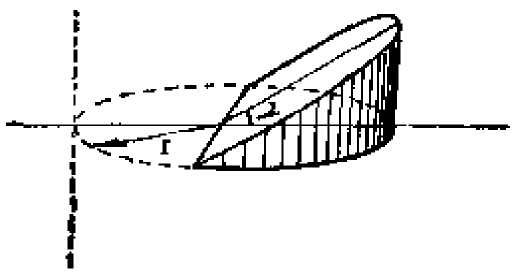


图 12.12.20.5.

12.12.20.6 计算 Viviani 窗，即 $\mathbf{R}^3$ 中如下定义的点集：$\{(x, y, z): x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$ 和 $x^2+y^2 \leqslant x\}$ 的体积.

12.12.20.7 **三平面公式.** 在三维欧几里得空间中，考虑一个紧集 K，它是由一个曲面和在适当选取的 z 轴上高度为 a, b 的两个平行平面 $H(a)$ 和 $H(b)$ 所围成的部分. 记 $S(z)$ 是高度为 z 的

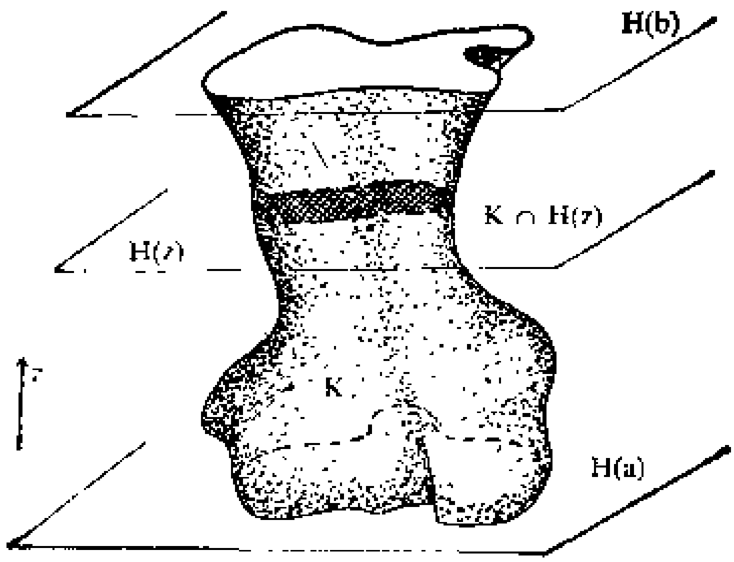


图 12.12.20.7.

平面所得截面 $K\cap S(z)$ 的面积，并假设 $S(z)$ 至多是一个 z 的三次多项式。证明K的体积由下式给出：

$$\frac{b-a}{6}\left[S(a)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)+S(b)\right],$$

(称为三平面公式)

用此法再次求 12.12.20.2 中球带的体积。并应用于圆台。证明当K的侧面是一个直纹面时，公式是可行的。

12.12.20.8 计算方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的旋转椭球体的体积。

12.12.20.9 Guldin 定理. 凡在所出现的C不是凸集的情形，对面积可按可微子流形的意义理解。考虑三维欧几里得空间 E 中一个平面 P 内的紧集 K。证明：K 围绕 P 中不与它相交的直线D作完全旋转所生成的 E 中的紧集 C 的体积由下式给出：

$$\mathfrak{L}_E(C)=2\pi\cdot d(g,D)\mathfrak{L}_P(K),$$

这里 $g=\text{cent}(K)$ 表示K的中心，参见 2.7.5.2。

如果把K的边界视作均匀细线，记 h 为通常意义下此线的重

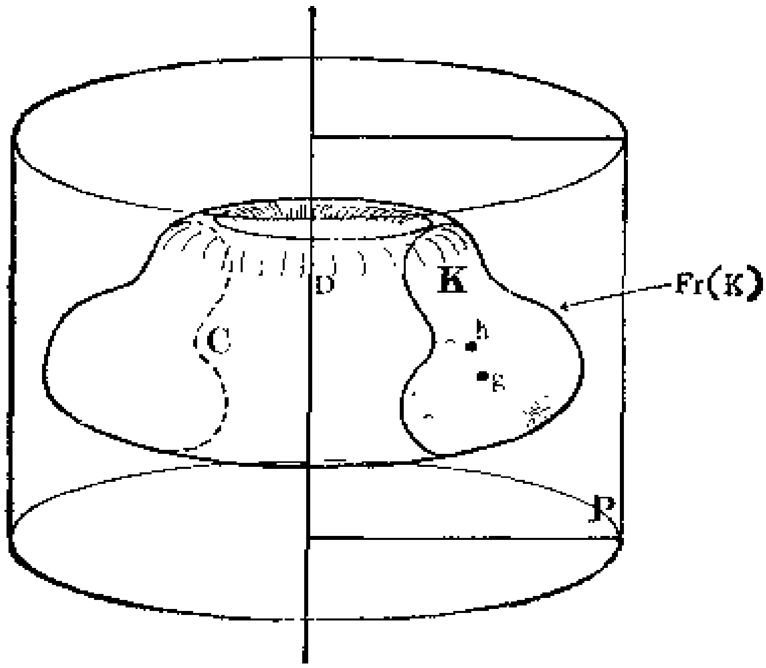


图 12.12.20.9.

心，证明C的面积为

$$\mathfrak{A}_E(C) = 2\pi d(h, D)\cdot\mathfrak{A}_P(K).$$

试给出此公式的应用，并就已知的体积或面积公式进行验证

12.12.21 设A是n维欧几里得空间E中的一个内部非空的紧凸集，x是它的中心（参见 2.7.5.5）。对于$\vec{E}$的任意一个单位向量ξ，用$\delta(\xi)$表示x到A的下述支撑超平面的距离：此支撑超平面与ξ垂直，且对此超平面中所有的y有$(\overrightarrow{xy}|\xi)>0$（参见 11.8.12.3），用$B(\xi)$表示沿$\xi$方向的宽度$\mathrm{larg}_\xi A$（参见 11.5.6.3）。证明：对任意的$\xi$，

$$\frac{B(\xi)}{n+1}\leqslant\delta(\xi)\leqslant\frac{nB(\xi)}{n+1}$$

（参见［VE］第 190 页命题 12.5）。

参 考 书 目

[A-A] ARNOLD (V. I.) et AVEZ (A.). *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars.

[A-B] ANNEQUIN et BOUTIGNY. *Cours de Physique, Optique*, Vuibert.

[A-B-S] ATIYAH (M. F.). BOTT (R.) et SHAPIRO (A.). *Clifford Modules*, Topology, 3, 1964-1965, supplément, p. 3-38.

[AE] *Astronomie*, Encyclopédie de la Pléiade, Gallimard

[AN] ARTIN (Emil). *Geometric Algebra*, Interscience.

[AR] ARNOLD (V.). *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou.

[AS] ARNAUDIÈS (J.-M.), *Les cinq polyèdres de $\mathbf{R}^3$ et leurs groupes*, C.D.U.-S.E.D.E.S., Paris.

[AV] ALEXANDROW (A. D.). *Konvexe Polyeder*, Akademie Verlag, Berlin.

[AW] ALEXANDROW (A.D.). *Die innere Geometrie der konvexe Fläche*, Akademie Verlag, Berlin.

[BA] BIANCHI (L.). *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle transformazioni asintotiche delle curve el delle superficie*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 25, 1908, p. 291-325.

[BAN] BANCHOFF (Thomas). *Non-rigidity Theorems for Tight Polyhedra*, Archiv der Mathematik, 21, 1970, p. 416-423.

[BA-WH] BANCHOFF (Thomas) et WHITE (James). *The behavior of the total twist and self-linking number of a closed space curve under inversions*, Mathematica Scandinavica 36, 1975, p. 254-262.

[B-B] BECKENBACH (Edwin F.) et BELLMAN (Richard). *Inequalities*, Springer.

[BE] BROUSSE (Pierre). *Mécanique*, Armand Colin.

[BER] BERGER (M.). *Lectures Notes on Geodesics in Riemannian Geometry*, Tata Institute, Bombay.

[BES] BESSE (Arthur). *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik, Band 93, Springer.

[B-F] BONNESEN (O.) et FENCHEL (W.). *Theorie der konvexe Körper*, Chelsea.

[B-G] BERGER (Marcel) et GOSTIAUX (Bernard). *Géométrie différentielle*, Armand Colin.

[B-H] BOREL (A.) et HIRZEBRUCH (F.). *Characteristic Classes and Homogeneous Spaces*, American Journal of Math., 80, 1958, p. 458-538.

[B-H-H] BLACK (W. L.), HOWLAND (H. C.) et HOWLAND (B.). *A Theorem about Zigzags between two Circles*, American Math. Monthly, 81, 1974, p. 754-757.

[BI 0] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Théorie des Ensembles, Hermann, 1970.

[BI 1] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Topologie Générale, chapitres 5 à 10, Hermann, 1974.

[BI 2] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, livre II, chapitre 9, Hermann.

[BI 3] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, livre V, chapitres 1, 2, 2e édition. Hermann.

[BI 4] BOURBAKI (Nicolas). *Groupes et algèbre de Lie*, chapitre 4, 5, 6, Hermann.

[BI 5] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Algèbre, chapitres 1 á 3, Hermann, 1970.

[B-K] BUSEMANN (Herbert) et KELLY (Paul J.). *Projective Geometry and Projective Metrics*, Academic Press.

[BL] BLUMENTHAL (Leonard M.). *Theory and Applications of Distance Geometry*, Chelsea.

[BLA 1] BLASCHKE (Wilhelm). *Kreis und Kugel*, Chelsea.

[BLA 2] BLASCHKE (Wilhem). *Vorlesungen über Differential Geometrie, II : Affine Differential Geometry*, Springer.

[BLA 3] BLASCHKE (Wilhelm). *Vorlesungen über Differential Geometrie, III : Differential Geometrie der Kreise und Kugel*, Springer.

[BL-BO] BLASCHKE (W.) et BOL (G.). *Geometrie der Gewebe*, Springer, 1938.

[B-M] BLUMENTHAL (Leonard M.) et MENGER (Karl). *Studies in Geometry*, W. H. Freeman.

[BN] BOURGIN (D. G.). *Modern Algebraic Topology*, Mac Millan.

[BO 1] BOREL (Armand). *Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes*, American Journal of Math., 76, 1954, p. 273-342.

[BO 2] BOREL (Armand). *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Annals of Math., 57, 1953, p. 115-207.

[BP] BAUDOIN (Paul). *Les ovales de Descartes et le limaçon de Pascal*, Vuibert.

[BR] BAER (R.). *Linear Algebra and Projective Geometry*, Academic Press.

[B-S] BOREVICH (Z. I.) et SHAFAREVICH (I. R.). *Number Theory*, Academic Press.

[B-T] BRUHAT (F.) et TITS (J.). *Groupes réductifs sur un corps local, I. Données radicielles valuées*, Public. Math. I.H.E.S., nº 41.

[BU 1] BUSEMANN (Herbert). *Convex Surfaces*, Interscience.

[BU 2] BUSEMANN (Herbert). *Recent Synthetic Differential Geometry*, Ergebnisse der Mathematik, n° 54, Springer.

[BUR] BURCKHARDT (J. J.). *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie*, Birkhaüser.

[BV] BONNEVAL (H.). *Photogrammétrie générale* (4 *volumes*), Eyrolles.

[BZ] BENZ (Walter). *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, Springer.

[CA] CAIRNS (Stewart Scott). *Introductory Topology*, Ronald Press.

[CAL] CALLAHAN (Francis P.). *Morley polygons*, American Math. Monthly 84, 1977, p. 325-337.

[C-B] COUDERC (P.) et BALLICIONI (A.). *Premier livre du tétraèdre*, Gauthier-Villars.

[CD] CARATHEODORY (C.). *The most general transformation which transform circles into circles*, Bull. Amer. Math. Soc., 43, 1937, p. 573-579.

[C-D-L] COHEN-TANNOUDJI (C.), DIU (B.) et LALOE (F.). *Mécanique quantique*, *vol.* 1, Hermann.

[CE 1] CARTAN (Elie). *Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes*, Oeuvres complètes, tome I, volume 2, p. 1227-1246.

[CE 2] CARTAN (Elie). *The Theory of Spinors*, Hermann ou The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.

[C-G] CHEEGER (Jeff) et GROMOLL (Detlef). *On the Structure of Complete Manifolds of Nonnegative Curvature*, Ann. of Math., 96, 1972, p. 413-443.

[CH 1] CARTAN (Henri). *Calcul différentiel*, Hermann.

[CH 2] CARTAN (Henri). *Théorie élémentaire des fonctions d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann.

[CH-GR] CHERN (S. S.) et GRIFFITHS (P.). *Abel's theorem and webs*, Jahrbericht d. Deutsche Math.-Verein., 80, 1978, p. 13-110.

[CL 1] CONNELLY (Robert). *A counter example to the rigidity conjecture for polyhedra*, Public. Math. I.H.E.S., 47, 1978, p. 333-338.

[CL 2] CONNELLY (Robert). *A flexible sphere*, Math. Intelligencer, 1, 1978, p. 130-131.

[C-M] COXETER (H. S. M.) et MOSER (W. O. J.). *Generators and Relations for Discrete Groups*, 2e édition, Springer.

[CN] CUENIN (R.). *Cartographie générale* (2 *volumes*), Eyrolles.

[CO] CONNELLY (Robert). *An attack on rigidity I, II*. Preprints, Cornell University.

[CR 1] COXETER (H. S. M.). *Introduction to Geometry*, John Wiley.

[CR 2] COXETER (H. S. M.). *Regular Polytopes*, Methuen.

[CR 3] COXETER (H. S. M.). *Non-euclidean Geometry*, The University of Toronto Press.

[CR 4] COXETER (H. S. M.). *Regular Complex Polytopes*, Cambridge University Press.

[CR 5] COXETER (H. S. M.). *The Problem of Apollonius*, American Math. Monthly, 75, 1968, p. 5-15.

[CS] CASSELS (J. W. S.). *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Springer.

[CT] CHOQUET (Gustave). *Cours d'Analyse, tome II : Topologie*, Masson

[CY] CHEVALLEY (Claude) *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press.

[CZ] CONZE (Jean-Pierre). *Le théorème d'isomorphisme d'Ornstein et la classification des systèmes dynamiques en théorie ergodique*, Séminaire Bourbaki, novembre 1972.

[D-C 1] DELTHEIL (Robert) et CAIRE (Daniel). *Géométrie*, J. B. Baillière.

[D-C 2] DELTHEIL (Robert) et CAIRE (Daniel). *Compléments de géométrie*, J. B. Baillière.

[DE 1] DIEUDONNÉ (Jean). *La géométrie des groupes classiques, 2e édition*, Springer.

[DE 2] DIEUDONNÉ (Jean). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, 3e édition*, Hermann.

[DE 3] DIEUDONNÉ (Jean). *Calcul infinitésimal*, Hermann.

[DE 4] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome II*, Gauthier-Villars.

[DE 5] DIEUDONNÉ (Jean), *Eléments d'Analyse, tome III*, Gauthier-Villars.

[DE 6] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome IV*, Gauthier-Villars.

[DE 7] DIEUDONNÉ (Jean). *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press.

[DE 8] DIEUDONNÉ (Jean). *Cours de Géométrie Algébrique* (*tomes* 1 *et* 2), Presses Universitaires de France.

[D-G-K] DANZER (L.), GRÜNBAUM (B.) et KLEE (V.). *Helly's Theorem and its Relatives*, A.M S. Symposium on Convexity, Proc. Symp. Pure Math., volume 7, 1963.

[DI] DEMBOWSKI (P.). *Finite Geometries*, Ergebnisse der Mathematik, n° 44, Springer.

[DI-CA] DIEUDONNÉ (Jean) et CARRELL (James B.) *Invariant Theory, Old and New*, Academic Press

[DN] DANJON (André). *Astronomie générale*, J. et R. Sennac.

[DO] DORRIE (Heinrich). 100 *Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover.

[DQ] DUPORCQ (Ernest). *Premiers principes de géométrie moderne, 3e édition*, Gauthier-Villars.

[DR] DIXMIER (Jacques). *Cours de mathematiques du premier cycle, deuxième année*, Gauthier-Villars.

[DV] DVORETSKY (Aryeh). *Some results on convex bodies and Banach spaces*, p. 123-160 dans Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces, Jerusalem, 1961.

[DX] DARBOUX (Gaston). *Principes de Géométrie Analytique*, Gauthier-Villars.

[DY] DOUADY (Adrien). *Le shaddock à six becs*, Bulletin A.P.M.E.P., 281, 1971, p. 699.

[EE] *Encyklopädie der Mathematischen Wissenchaften, Geometrie*, III.2.1, Teubner.

[E-K] EELLS (James) et KUIPER (Nicolas O.). *Manifolds which are like Projective Planes*, Public. Math. I.H.E.S., nº 14, p. 5-46.

[EL] ELLISON (W. J.). *Waring's problem*, American Math. Monthly, 78, 1971.

[EN] EGGLESTON (H. G.). *Convexity*, Cambridge University Press.

[ER] ESCHER (M. C.). *L'œuvre graphique*, Solin, Paris.

[E-S] EELLS (J.) et SAMPSON (J. H.). *Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds*, American Journal of Math., 86, 1964, p. 109-160.

[FA] FALCONER (K. J.). *A characterisation of plane curves of constant width*, J. London Math. Soc., 16, 1977, p. 536-538.

[FI] FILLMORE (Jay P.). *Symmetries of surfaces of constant width*, J. of Diff. Geometry, 3, 1969, p. 103-110.

[FL] FRENKEL (Jean). *Géométrie pour l'élève-professeur*, Hermann.

[FN] FULTON (William). *Algebraic Curves*, Benjamin.

[FR] FEDERER (Herbert). *Geometric Measure Theory*, Springer.

[FT 1] FEJES-TOTH (L.). *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Springer.

[FT 2] FEJES-TOTH (L.). *Regular Figures*, Pergamon.

[GA] GARDNER (Martin). *Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles*, Scientific American, January 1977.

[GE] GONSETH (F.). *Un théorème relatif à deux ellipsoides confocaux*, Bulletin des Sciences Math., 42, 1918, p. 177-180 et 193-194.

[GG] GREENBERG (Marvin J.). *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin.

[G-G-V] GELFAND (I. M.), GRAEV (M. I.) et VILENKIN (N. Ya). *Generalized Functions, volume 5, Integral Geometry and Representation Theory*, Academic Press.

[GIS] GRIFFITHS (Phillip A.). *Variations on a Theorem of Abel*, Inventiones Math., 35, 1976, p. 321-390.

[GI-WE] GIBBONS (J. C.) et WEBB (C.). *Circle preserving maps of spheres*, preprint, Illinois Institute of Technology, Chicago.

[GK] *Grundzüge der Mathematik, Band IV : Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik*, Vandenhoeck and Ruprecht.

[G-K-M] GROMOLL (D.), KLINGENBERG (W.) et MEYER (W.). *Riemannsche Geometrie im Grossen, Lecture Notes in Mathematics*, nº 55, Springer.

[GL] GLUCK (Herman). *Almost All Simply Connected Closed Surfaces are Rigid*, preprint, University of Pennsylvania.

[GM] GRAMAIN (André). *Topologie des surfaces*, Presses Universitaires de France.

[GN] GÉRARDIN (Paul). *Mathématiques Elémentaires Approfondies*, cours polycopié, Université Paris VII, U.E.R. de Mathématiques.

[G-O] GELBAUM (Bernard D.) et OLMSTED (John M. H.). *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day.

[GR] GUGGENHEIMER (Heinrich W.). *Plane Geometry and its Groups*, Holden-Day.

[GR-HA] GRIFFITHS (P.) et HARRIS (S.). *On Cayley's Explicit Solution to Poncelet's Porism*, L'Enseignement Mathématique, 24, 1978, p. 31-40.

[GR-SH1] GRÜNBAUM (B.) et SHEPHARD (G. C.). *The eighty-one types of isohedral tilings in the plane*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 82, 1977, p. 177-196.

[GR-SH2] GRÜNBAUM (B.) et SHEPHARD (G. C.). *The 91 types of isogonal tiling in the plane*, Trans. A.M.S., 242, 1978, p. 335-354.

[GS] *Geometric Inequalities* (BOTTEMA *et alia*), Wolters-Noordhoof.

[GT] GUICHARDET (A.). *Calcul intégral*, Armand Colin.

[GX] GODEAUX (Lucien). *Les géométries*, Armand Colin.

[HA] HALL (M.). *The Theory of Groups*, Mac Millan.

[HA-WR] HARDY (G. H.) et WRIGHT (E. M.). *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press.

[H-C] HILBERT (D.) et COHN-VOSSEN (S.). *Geometry and the Imagination*, Chelsea.

[HD 1] HADAMARD (Jacques). *Leçons de géométrie élémentaire, tome I, 10e édition*, Armand Colin.

[HD 2] HADAMARD (Jacques). *Leçons de géométrie élémentaire, tome II, 7e édition*, Armand Colin.

[H-K] HAUPT (O.) et KUNNETH (H.). *Geometrische Ordnungen*, Springer.

[H-L-P] HARDY (G. H.), LITTLEWOOD (J. E.) et POLYA (G.). *Inequalities*, Cambridge University Press.

[HM] HARTMAN (P.). *On Isometries and a Theorem of Liouville*, Mathematische Zeitschrift, 69, 1958, p. 202-210.

[HN] HELGASON (Sigurdur). *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press.

[HOL] d'HOLLANDER (Raymond). *Topologie Générale, tome I : Généralités, Mesure des angles et des distances*, Eyrolles.

[HO-PE] HODGE (W. V. D.) et PEDOE (D.). *Methods of Algebraic Geometry*, Cambridge University Press.

[H-P] HUGHES (Daniel R.) et PIPER (Fred C.). *Projective Planes*, Springer.

[HR] HADWIGER (H.). *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer.

[HS] HERSCH (Joseph). *Quatre propriétés des membranes sphériques homogènes*, C.R.A.S., 270, 1970, p. 1714-1716.

[HU] HUSEMOLLER (Dale). *Fibre Bundles*, McGraw Hill.

[H-W] HILTON (P. J.) et WYLIE (S.). *Homology Theory*, Cambridge University Press.

[H-Y] HOCKING (John G.) et YOUNG (Gail S.). *Topology*, Addison-Wesley.

[HZ] HURWITZ (M. A.). *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*, Annales Ecole Norm., 19, 1902, p. 357-408.

[I-R] ILLIOVICI (G.) et ROBERT (P.). *Géométrie*, Eyrolles.

[JE] JOEDICKE (Jürgen). *Les structures en voiles et coques*, Vincent, Fréal et Cie.

[KE] KRÉE (P.). *Introduction aux mathématiques et à leurs applications fondamentales, M.P. 2*, Dunod.

[KF] KAZARINOFF (Nicholas D.). *Geometric Inequalities*, Random House.

[KG 1] KLINGENBERG (Wilhelm). *Eine Vorlesung über Differential Geometrie*, Springer.

[KG 2] KLINGENBERG (Wilhelm). *Paare symmetrischen und alternierenden Formen zweiten Grades*, Abhandl. Math. Sem. Hamburg, 19, 1955, p. 78-93.

[KH] KUROSH (A. G.). *Lectures in General Algebra*, Pergamon.

[KM] KLOTZ-MILNOR (Tilla). *Efimov's Theorem about Complete Immersed Surfaces of Negative Curvature*, Advances in Math., 8, 1972, p. 474-543.

[KN 1] KLEIN (Félix). *Lectures on the Icosahedron*, Dover.

[KN 2] KLEIN (Félix). *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Springer.

[KO-NO 1] KOBAYASHI (Shoshichi) et NOMIZU (Katsumi). *Foundations of Differential Geometry, volume I*, Interscience.

[KO-NO 2] KOBAYASHI (Shoshichi) et NOMIZU (Katsumi). *Foundations of Differential Geometry, volume II*, Interscience.

[LB 1] LEBESGUE (Henri). *Leçons sur les constructions géométriques*, Gauthier-Villars.

[LB 2] LEBESGUE (Henri). *Les coniques*, Gauthier-Villars.

[LB 3] LEBESGUE (Henri). *Octaèdres articulés de Bricard,* l'Enseignement mathématique, 13, 1967, p. 175-185.

[LE] LEKERKERKER (C. G.). *Geometry of numbers.* Walters-Noordhoff.

[LF 1] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Géométrie différentielle,* Masson.

[LF 2] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes,* Mémoires Acad. Royale Belg., Cl. Sci. Mém. Coll. in-8°, 1971, fascicule 5.

[LF 3] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes,* J. of Diff. Geometry, 8, 1973, p. 487-510.

[LF-AR] LELONG-FERRAND (J.) et ARNAUDIES (J.-M.). *Cours de mathématiques, tome* 3, Dunod.

[LG 1] LANG (Serge). *Elliptic Functions,* Addison-Wesley.

[LG 2] LANG (Serge). *Analysis II,* Addison-Wesley.

[LM 1] LEMAIRE (J.). *Hypocycloïdes et Epicycloïdes,* Vuibert.

[LM 2] LEMAIRE (J.). *L'hyperbole équilatère,* Vuibert.

[LP] *Le libre du problème, volume* 4 : *la convexité,* CEDIC.

[LR 1] LEHNER (Joseph). *A Short Course in Automorphic Functions.* Holt, Rinehart and Winston.

[LR 2] LEHNER (Joseph). *Discontinuous Groups and Automorphic Functions,* Math. Surveys, number VIII, American Math. Society.

[LS] LEVALLOIS (Jean-Jacques). *Géodésie Générale, tome II : Géodésie classique bidimensionnelle,* Eyrolles.

[LU] LUSTERNIK (Lazar A.). *Convex Figures and Polyhedra,* Heath.

[LY] LEVY (Harry). *Projective and Related Geometry,* Mac Millan.

[LZ] LAZUTKIN (V. F.). *The Existence of Caustics for a Billiard Problem in a Convex Domain,* Math. USSR Izvestia, 7, 1973, p. 185-214.

[MA] MALLIAVIN (Paul). *Géométrie différentielle intrinsèque,* Hermann.

[MD] MARCHAUD (A.). *Les surfaces du second ordre en géométrie finie,* J. Math. pures et appl., 9-15, 1936, p. 293-300.

[MI] MILNOR (John). *A problem in cartography,* American Math. Monthly, 76, 1969, p. 1101-1102.

[MJ] MANDELBROJT (Benoît). *Les Objets fractals,* Flammarion.

[ML] MICHEL (Charles). *Compléments de géométrie moderne,* Vuibert.

[M-P] MODENOV (P. S.) et PARKHOMENKO (A. S.). *Geometric Transformations, volume I,* Academic Press.

[MR] MATHER (J.). *The nice dimensions, Proceedings of Liverpool Singularities, Symposium I,* Lecture Notes in Mathematics n° 192, Springer.

[M-T] MARTINEAU (André) et TREVES (François). *Eléments de la théorie des espaces vectoriels topologiques et des distributions, fascicule I*, C.D.U.

[MW 1] MOSTOW (G. D.). *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces*, Annals of Mathematical Studies, nº 78, Princeton University Press.

[MW 2] MOSTOW (G. D.). *Discrete Subgroups of Lie Groups*, Advances in Mathematics, 15, 1975, p. 112-123.

[NA] NEVANLINNA (Rolf). *On Differentiable Mappings, Analytic Functions*, p. 3-9, Princeton University Press.

[OA] OBATA (M.). *The Conjecture on Conformal Transformations of Riemannian Manifolds*, J. of Differential Geometry, 6, 1972, p. 247-258.

[OM] O'MEARA (O. T.). *Introduction to Quadratic Forms*, Springer.

[OS 1] OSSERMAN (Robert). *Bonnesen-style Isoperimetric Inequalities*, American Math. Monthly, 86, 1979, p. 1-29.

[OS 2] OSSERMAN (Robert). *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc., 84, 1978, p. 1182-1238.

[PA] PALAIS (Richard). *The Classification of G-Spaces*, Memoirs of the A.M.S., nº 36.

[PC] PASCAL (Blaise). *Pensées*, édition Brunschwig.

[PE] PEDOE (D.). *A Course of Geometry*, Cambridge University Press.

[PL] POHL (William F.). *A Theorem of Géométrie finie*, Journal of Differential Geometry, 10, 1975, p. 435-466.

[PN] PAYNE (L. E.). *Isomerimetric Inequalities and their Applications*, SIAM Review, 9, 1967, p. 453-488.

[PO] PORTEOUS (I. R.). *Topological Geometry*, Van Nostrand-Reinhold.

[PR] PORTER (T. I.). *A History of the Classical Isoperimetric Problem, Contributions to the Calculus of Variations*, University of Chicago Press, 1933.

[P-S] POLYA (G.) et SZEGÖ (G.). *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Princeton University Press ou Kraus Reprint Corporation.

[PT] PICKERT (G.). *Projektive Ebenen*, Springer.

[PV 1] POGORELOV (A. V.). *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces*, Israël Programm for Scientific Translation, Jerusalem.

[PV 2] POGORELOV (A. D.). *Complete Solution of Hilbert's Fourth Problem*, Soviet Math. Doklady, 14, 1973, p. 46-49.

[RA] RADEMACHER (Hans). *Topics in Analytic Number Theory*, Grundlehren nº 169, Springer.

[R-C 1] ROUCHE (Eugène) et de COMBEROUSSE (Charles). *Traité de Géométrie, 1re partie,* Gauthier-Villars.

[R-C 2] ROUCHE (Eugène) et de COMBEROUSSE (Charles). *Traité de Géométrie, 2e partie,* Gauthier-Villars.

[RE] ROUSSARIE (Robert). *Sur les feuilletages de variétés de dimension 3,* Annales de l'Institut Fourier, 21(3), 1971, p. 13-81.

[RM] DE RHAM (Georges). *Sur les polygones générateurs des groupes fuchsiens* l'Enseignement mathématique, 17, 1971, p. 49-61.

[RN 1] ROBINSON (Raphael M.). *Undecidability and Nonperiodicity for Tilings of the Plane,* Inventiones Math., 12, 1971, p. 177-209.

[RN 2] ROBINSON (Raphael M.). *Undecidable Tiling Problems in the Hyperbolic Plane,* Inventiones Math., 44, 1978, p. 259-264.

[RN 3] ROBINSON (Raphael M.). *Comments on the Penrose Tiles,* preprint, University of California, Berkeley.

[RO] ROMANOV (V. G.). *Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations,* Springer.

[RS] ROGERS (C. A.). *Packing and Covering,* Cambridge University Press.

[R-V] ROBERTS (A. Wayne) et VARBERG (Dale E.). *Convex Functions,* Academic Press.

[SA] SHIMURA (G.). *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions,* Iwanami Shoten et Princeton University Press.

[SB] STERNBERG (Shlomo) *Lectures on Differential Geometry,* Prentice-Hall.

[SC 1] SCHATTSCHNEIDER (Doris) *The plane symmetry groups : their recognition and notation,* American Math. Monthly, 85, 1978, p. 439-450.

[SC 2] SCHATTSCHNEIDER (Doris). *Tiling the plane with congruent pentagons,* Mathematics Magazine, 51 (1978), p 29-44.

[SD 1] STAUDE (Otto). *Fadenconstructionen des Ellipsoides,* Math. Annalen, 20, 1882, p. 147-184.

[SD 2] STAUDE (Otto). *Die Fokaleigenschaften der Flachen Zweiter Ordnung,* Leipzig, 1896

[SE 1] SERRE (Jean-Pierre). *Corps locaux,* Hermann.

[SE 2] SERRE (Jean-Pierre). *Cours d'arithmétique,* Presses Universitaires de France.

[SE 3] SERRE (Jean-Pierre). *Algèbres de Lie semi-simples complexes,* W. A. Benjamin.

[SE-TH] SEIFERT (H.) et THRELFALL (W.). *Lehrbuch der Topologie,* Chelsea.

[SF 1] SCHWERDTFEGER (Hans). *Invariants of a class of transformation groups,* Aequationes Math., 14, 1976, p. 105-110.

[SF 2] SCHWERDTFEGER (Hans) *Invariants à cinq points dans le plan projectif,* C.R.A.S., 285, 1977, p. 127-128.

[SG] SEIDENBERG (A.). *Lectures in Projective Geometry*, Van Nostrand.

[SGR] *Séminaire de Géométrie Riemannienne de l'Université Paris VII*, 1970-1971.

[SK] SPIVAK (Michael). *Differential Geometry, volume II*, Michael Spivak.

[SL 1] SALLEE (G. T.). *Maximal areas of Reuleaux polygons*, Canadian Math. Bull., 13, 1970, p. 175-179.

[SL 2] SALLEE (G. T.). *Reuleaux polytopes*, Mathematika, 17, 1970, p. 315-323.

[SN] STEIN (S. K.). *Tiling Space by Congruent Polyhedra*, Bulletin of the A.M.S., 80, 1974, p. 819-820.

[SO] SANTALO (L. A.). *Introduction to Integral Geometry*, Hermann.

[SR] SPANIER (E.). *Algebraic Topology*, McGraw Hill.

[S-T] SNAPPER (Ernst) et TROYER (Robert J.). *Metric Affine Geometry*, Academic Press.

[STE] STEFFEN (Klaus). *A symmetric flexible Connelly sphere with only nine vertices*, preprint, I.H.E.S., Bures-sur-Yvette.

[ST-RA] STEINITZ (E.) et RADEMACHER (H.). *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Springer.

[SU] SAMUEL (Pierre). *Unique Factorization*, American Math. Monthly, 75, 1968, p. 945-952.

[SW] STEWART (Ian). *Galois Theory*, Chapman and Hall.

[TG] *Seminar on Transformation Groups*, by Armand BOREL, Annals of Mathematical Studies, n° 46, Princeton.

[TM] THOM (René). *Sur la théorie des enveloppes*, J. de Math. pures et appl., 16, 1962, p. 177-192.

[TS] TITS (Jacques). *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Springer Lecture Notes in Mathematics, n° 386.

[VE] VALENTINE (Frederik A.). *Convex Sets*, McGraw Hill.

[VG 1] VODERBERG (H.). *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in kongruente Bereiche in Form einer Spirale*, Jber. dtsch. Math. Ver., 46, 1936, p. 229-231.

[VG 2] VODERBERG (H.). *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in kongruente Bereiche in Form einer Spirale*, Jber. dtsch. Math. Ver., 46, 1937, p. 159-160.

[VL] DU VAL (Patrick). *Homographies, Quaternions and Rotations*, Oxford University Press.

[VN] VALIRON (Georges). *Equations fonctionnelles. Applications*, Masson.

[V-Y] VEBLEN (O.) et YOUNG (J. W.). *Projective Geometry*, deux volumes, Ginn and Co.

[WF] WOLF (Joseph A.). *Spaces of Constant Curvature*, J. A. Wolf.

[WK] WALKER (R. J.). *Algebraic Curves*, Dover.

[WL] WEYL (Hermann). *Symmetry*, Princeton University Press.

[WN] WENNINGER (Magnus J.). *Polyhedron Models*, Cambridge University Press.

[WO] WONG (Yung-Chow). *Isoclinic n-Planes in Euclidean 2n-Space, Clifford Parallels in Elliptic (2n − 1)-Space and the Hurwitz Matrix Equations*, Memoirs of the A.M.S., n° 41.

[WR] WARNER (Frank). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott-Foresman.

[Y-B] YAGLOM (I. M.) et BOLTYANSKII (V. G.). *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston.

[ZN] ZISMAN (Michel). *Topologie algébrique élémentaire*, Armand Colin.

[ZR] ZWIKKER (C.). *The advanced Geometry of Plane Curves and their Applications*, Dover.

[WF] WOLF (Joseph A.). *Spaces of Constant Curvature*, J. A. Wolf.

[WK] WALKER (R. J.). *Algebraic Curves*, Dover.

[WL] WEYL (Hermann). *Symmetry*, Princeton University Press.

[WN] WENNINGER (Magnus J.). *Polyhedron Models*, Cambridge University Press.

[WO] WONG (Yung-Chow). *Isoclinic n-Planes in Euclidean 2n-Space, Clifford Parallels in Elliptic (2n − 1)-Space and the Hurwitz Matrix Equations*, Memoirs of the A.M.S., n° 41.

[WR] WARNER (Frank). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups* Scott-Foresman.

[Y-B] YAGLOM (I. M.) et BOLTYANSKII (V. G.). *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston.

[ZN] ZISMAN (Michel). *Topologie algébrique élémentaire*, Armand Colin.

[ZR] ZWIKKER (C.). *The advanced Geometry of Plane Curves and their Applications*, Dover.

[WF] WOLF (Joseph A.). *Spaces of Constant Curvature*, J. A. Wolf.

[WK] WALKER (R. J.). *Algebraic Curves*, Dover.

[WL] WEYL (Hermann). *Symmetry*, Princeton University Press.

[WN] WENNINGER (Magnus J.). *Polyhedron Models*, Cambridge University Press.

[WO] WONG (Yung-Chow). *Isoclinic n-Planes in Euclidean 2n-Space, Clifford Parallels in Elliptic (2n − 1)-Space and the Hurwitz Matrix Equations*, Memoirs of the A.M.S., n° 41.

[WR] WARNER (Frank). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott-Foresman.

[Y-B] YAGLOM (I. M.) et BOLTYANSKII (V. G.). *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston.

[ZN] ZISMAN (Michel). *Topologie algébrique élémentaire*, Armand Colin.

[ZR] ZWIKKER (C.). *The advanced Geometry of Plane Curves and their Applications*, Dover.